

## 06 - Ruído - noções

**Por que os sinais de uma classe são apenas semelhantes, e não iguais ?**

### Hipóteses:

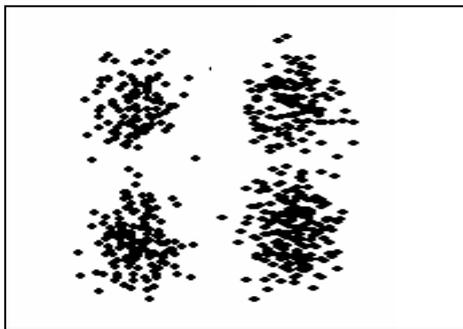
1 - Os elementos  $\underline{x}_j$  de uma classe  $C_j$  são constituídos pelo padrão  $\underline{m}_j$  da classe, ao qual foi adicionado um ruído  $\underline{r}_j$  característico da classe  $C_j$ .

$$\vec{x} \in C_j \quad \therefore \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j$$

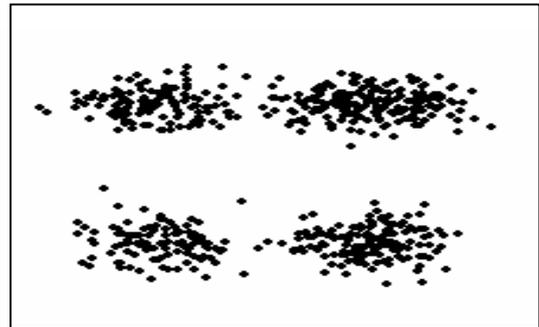
2 - O ruído  $\underline{r}_j$  é estocástico com média zero e distribuição aproximadamente gaussiana.

3 - As características do ruído independem da classe (ou não).

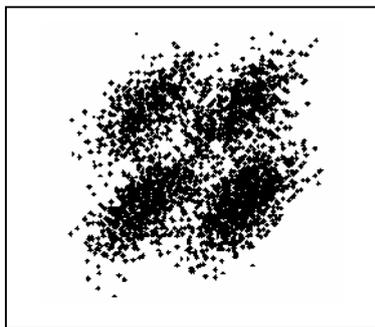
4 - Uma classe pode ser constituída por subclasses, às quais se aplicam as hipóteses acima.



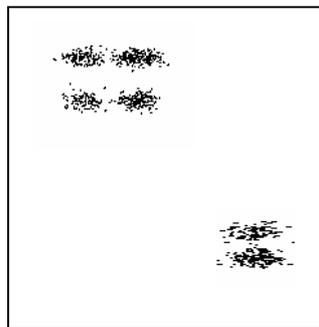
Ruído não correlato,  $\sigma_1 \cong \sigma_2$



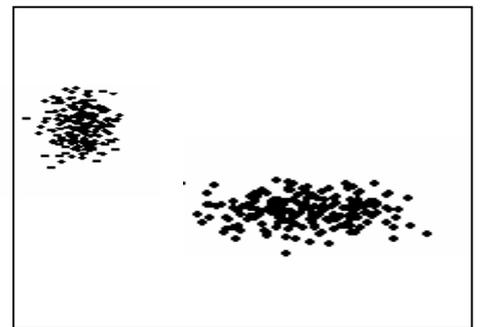
Ruído não correlato,  $\sigma_1 \neq \sigma_2$



Ruído correlato,  $x_1 = f(x_2)$



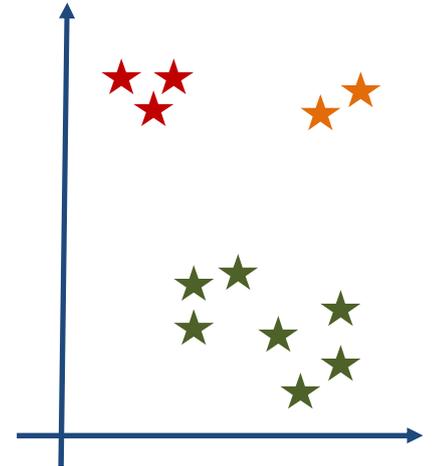
Classes compostas



Hipótese 3 não atendida



### Classificação por similaridade



### Caracterização do ruído

#### 1 - Caso supervisionado

As classes de cada entrada (elemento)  $\underline{x}$  são conhecidas. Neste caso seu baricentro  $\vec{m}_j$  também é conhecido

$$\vec{m}_j = \underset{\forall \vec{x}_i \in C_j}{E} \vec{x}_i = \frac{1}{n_j} \sum_{\forall \vec{x}_i \in C_j} \vec{x}_i$$

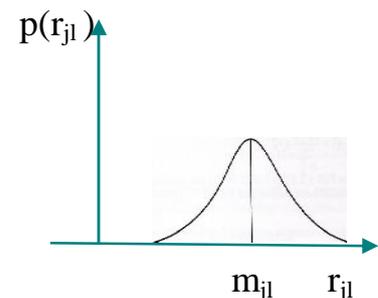
**Pares entrada-saída**  $[\vec{x}, C(\vec{x})]$

A caracterização do ruído de cada classe  $C_j$ ,  $\vec{r}_j$ , em cada dimensão  $l$ ,  $r_{jl}$ , pode ser realizada a partir da extração de  $\vec{r}_j$  das entradas pertencentes à classe

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j \quad \therefore \quad \vec{r}_j = \vec{x} - \vec{m}_j \quad e \quad r_{jl} = x_l - m_{jl}$$

A análise do conjunto das variáveis  $r_{jl}$  permite conhecer sua distribuição, seu valor eficaz  $\sigma$ , sua correlação com o ruído nas demais dimensões  $r_{jk} \mid k \neq l$ , etc.

Isto permitirá descorrelacionar os ruídos das diferentes dimensões, normalizar o valor eficaz por dimensão, etc., obtendo um conjunto de dados muito mais simples de classificar, como será visto mais tarde.



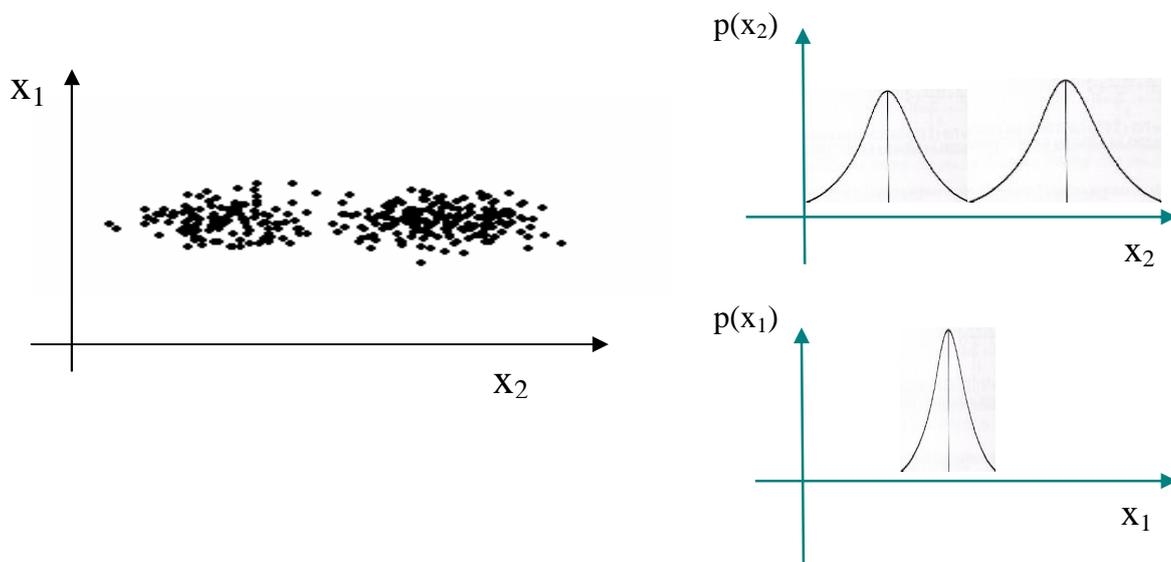
## 2 - Caso não supervisionado

As classes de cada entrada (elemento)  $\underline{x}$  **não** são conhecidas

Se as classes apresentarem uma dispersão inter classes (distância) razoavelmente maior que intra classe (diâmetros) a análise de  $p(x)$  em cada dimensão pode (eventualmente) indicar as características de cada classe em cada dimensão (centro, ruído, etc.).

$$\text{Para uma classe} \quad p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

$$\text{Para N classes} \quad p(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$



?

**Tentativa e erro por clusterização experimental.**

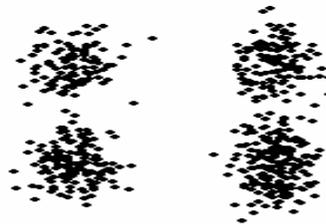
**Outras técnicas**

### 3 – Ruído - caso ideal

#### Classes com ruídos por componente com mesma variância e não correlatos - Classes esféricas

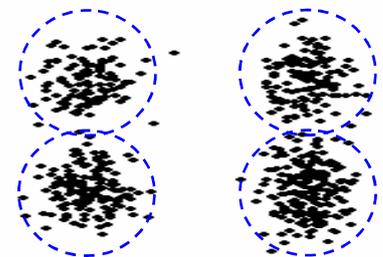
*Considerando o caso em que:*

- As classes foram geradas a partir de padrões adicionados de ruído aproximadamente gaussiano com média nula.
- que o valor rms (desvio padrão) do ruído de cada componente  $x_j$  é  $\sigma$ , independente da componente e da classe.



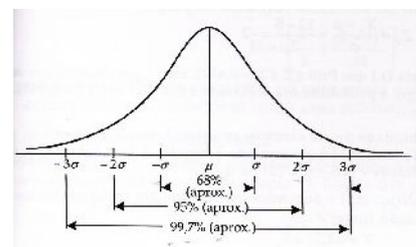
então

o separador ideal para as classes são esferas, que são também o separador natural por similaridade dos processos não supervisionados.



Se o ruído é gaussiano então as classes tem distribuição gaussiana multidimensional com desvio padrão unitário em todas as direções. Em consequência em cada dimensão o raio  $r_0$

- $r_0 = \sigma$  captura 68 % dos elementos da classe,
- $r_0 = 2\sigma$  captura 95 % dos elementos da classe,
- $r_0 = 3\sigma$  captura 99,7 % dos elementos da classe, etc.

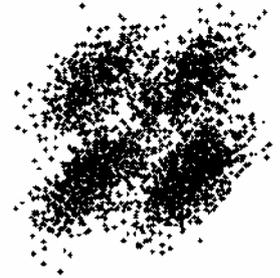


Tentaremos chegar próximo a esta condição através do pré-processamento

#### 4 - Branqueamento do Ruído – gerando classes esféricas *classes sphereing*

Se os ruídos das componentes forem correlatos os domínios das classes serão elipsoides e estarão contidos por esferas maiores, que incluem espaços da não classe.

O branqueamento do ruído leva a classes esféricas, que permitirá o uso de um classificador muito mais simples. O branqueamento do ruído dos dados é obtido em duas etapas.



Inicialmente a decorrelação dos ruídos  $r_i$  deve ser obtida representando os dados  $\underline{x}$  (padrão da classe + ruído) em uma base  $\underline{B}$  do espaço das componentes principais (PCA) do ruído  $\underline{r}$  de cada dado de entrada (**PCA dos ruídos, e não dos sinais!**). Calcular as PCA de  $\underline{r}$  e a matriz de mapeamento  $\underline{B}$  do ruído  $\underline{r}$  em sua PCA  $\underline{p}$

$$\vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j \quad \therefore \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j$$

Utilizando  $\underline{B}$  determinamos o mapeamento de cada ruído  $\underline{r}$  em sua PCA  $\underline{p}$

$$\vec{p} = B \vec{r} \quad \text{onde} \quad [B] = [\vec{b}_1^t \vec{b}_2^t \vec{b}_3^t \dots \vec{b}_m^t]$$

e a variância de cada componente  $p_i$

$$\sigma_i^2 = E[p_i]^2 = E[\vec{b}_i^t \vec{r}]^2$$

A segunda etapa deve ser a equalização da potência do ruído nas diversas dimensões. A matriz de pesos  $\underline{P}$  para normalização das potências dos ruídos será

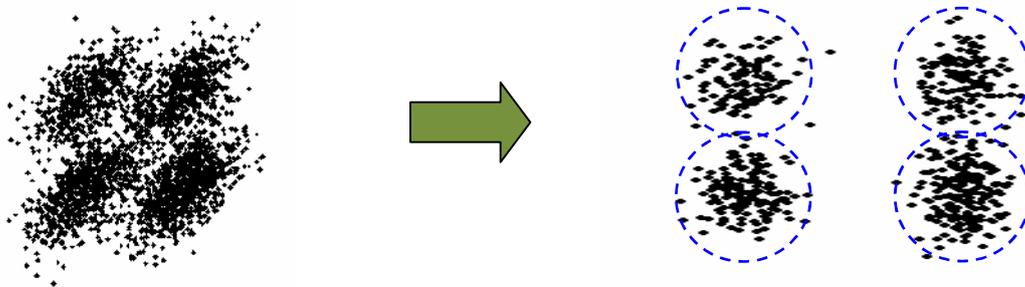
$$P = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_i} \right)$$

**Os novos dados à classificar serão**

$$\vec{z} = P B \vec{x} = P B \vec{m}_j + P B \vec{r} = \vec{m}_{j_{novo}} + \vec{r}_{novo}$$

**As classes passam a ter um novo padrão  $\vec{m}_{j_{novo}}$  adicionado de um ruído branco  $\vec{r}_{novo}$  com desvio padrão unitário.**

$$\vec{m}_{j_{novo}} = P B \vec{m}_j \quad \vec{r}_{novo} = P B \vec{r} = \vec{1} = [1 \ 1 \ 1 \dots \ 1]^t$$



#### 4.1 Algumas observações:

- A multiplicação por **B** representa uma rotação e por isto não altera a posição relativa das classes, como será visto adiante.
- O uso de PCA sugere a eliminação de componentes pouco relevantes, i.e., com pequenos

$$\sigma_i^2 = E[p_i]^2 = E[\vec{b}_i^t \vec{r}]^2$$

e a conseqüente redução da dimensionalidade e simplificação do classificador. Entretanto, a eliminação de uma componente principal para  $\vec{r}_j$  somente pode ser feita se for pouco relevante para  $\vec{x}$ , isto é, se

$$\sigma^2(z_i) = E\left[\frac{1}{\sigma_i} \vec{b}_i^t \vec{x}\right]^2 \text{ for muito pequeno comparado com seus pares.}$$

**A relevância para  $\vec{x}$  é que determina a eliminação ou não da componente !**

- A multiplicação por  $P$  realiza um escalamento diferente por componente e pode alterar a classificação, principalmente se houver grande dispersão entre os  $\sigma_i$ , como será visto adiante,
- Caso os ruídos sejam não correlatos, a primeira etapa é obviamente desnecessária

$$B = I$$

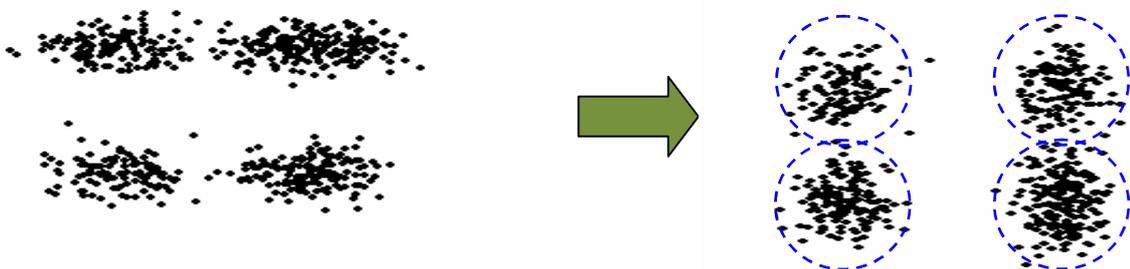


E a dispersão em cada dimensão  $i$  é dada por

$$\sigma_i^2 = E[r_i]^2 \quad \text{e} \quad P = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_i} \right)$$

**Os novos dados à classificar serão**

$$\vec{z} = P \vec{x} = P \vec{m}_j + P \vec{r} = \vec{m}_{j_{novo}} + \vec{r}_{novo}$$



## 5. Algumas distribuições importantes:

### 5.1 Distribuição Normal ou Gaussiana

A distribuição Normal ou Gaussiana é uma das distribuições de probabilidade mais utilizadas para modelar fenômenos da natureza porque um grande número destes fenômenos apresenta sua distribuição de probabilidade aproximadamente normal, por exemplo o ruído branco.

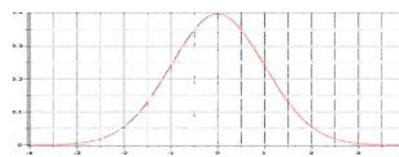
Em nosso caso consideramos que os elementos  $\underline{x}$  de uma classe  $C$  são compostos pelo padrão  $\underline{m}$  da classe adicionado de ruído branco  $\underline{r}$ .

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r} \quad \therefore$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j \quad e \quad r_i = x_i - m_{ij}$$

### Função de distribuição de probabilidade, f.d.p.

$$p(r_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}$$

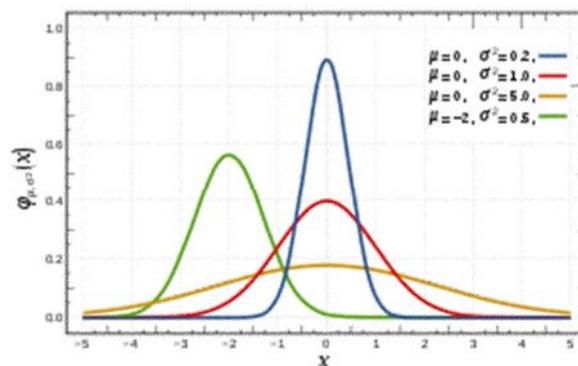


Média = mediana = moda

$$\mu = 0$$

Desvio padrão

$$\sigma$$





## 5.2 Distribuição Chi-quadrado $\chi_k^2$

A distribuição qui-quadrado é importante porque permite calcular a probabilidade de uma entrada  $\underline{x}$  afetada de ruído branco  $\underline{r}$  estar a uma distância  $\underline{d}$  do padrão da classe  $\underline{m}$ , isto é, permite estimar a probabilidade da similaridade de uma entrada com seu padrão.

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r} \quad \therefore \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j$$

$$r_i = x_i - m_{ij} \quad e$$

$$d^2 = |\vec{x} - \vec{m}_j|^2 = |\vec{r}|^2 = \sum_{i=1}^k r_i^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - m_{ij})^2 = -u$$

Para o caso ideal, com todos os  $r_i$  não correlatos e com  $\sigma_i = 1$

em cada dimensão  $i$  de  $\vec{x}$   $d_i^2 = r_i^2 = -u_i$

distribuição  $\chi_1^2$  com 1(um) grau de liberdade

em todas as  $k$  dimensões de  $\vec{x}$   $d^2 = \sum_{j=1}^k r_j^2 = -u$

distribuição  $\chi_k^2$  com  $k$  graus de liberdade

## Função densidade de probabilidade $\chi_k^2$

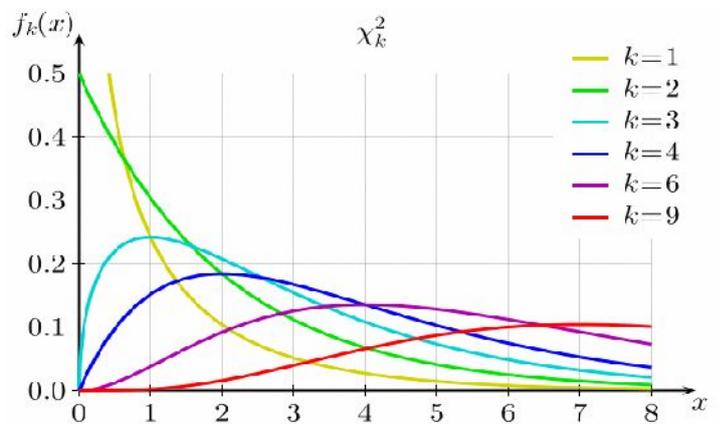
$$p(r) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} r^{k/2-1} e^{-r/2}$$

média =  $k$

$$\text{mediana} = \approx k \left(1 - \frac{2}{9k}\right)^3$$

$$\text{moda} = \max[0, (k-2)]$$

variância =  $2k$

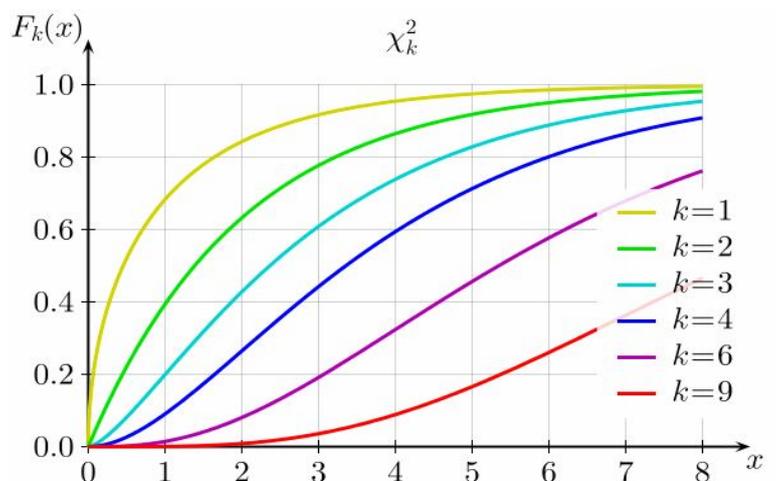


## Função erro (uma das definições) de $\chi_k^2$

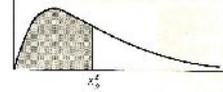
### Função de distribuição acumulada

$$\text{erf}(r_0) = p(r | r < r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} p(t) dt = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{r_0}{2}\right)$$

tabelada para diversos k



**TABLE 49**  
**PERCENTILE VALUES (P) FOR THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION**  
 with  $v$  Degrees of Freedom



| $v$ | $x_{.995}^2$ | $x_{.99}^2$ | $x_{.95}^2$ | $x_{.90}^2$ | $x_{.85}^2$ | $x_{.80}^2$ | $x_{.75}^2$ | $x_{.70}^2$ | $x_{.65}^2$ | $x_{.60}^2$ | $x_{.55}^2$ | $x_{.50}^2$ | $x_{.45}^2$ | $x_{.40}^2$ | $x_{.35}^2$ | $x_{.30}^2$ | $x_{.25}^2$ | $x_{.20}^2$ | $x_{.15}^2$ | $x_{.10}^2$ | $x_{.05}^2$ | $x_{.025}^2$ | $x_{.01}^2$ | $x_{.005}^2$ |
|-----|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|--------------|
| 1   | 0.004        | 0.01        | 0.02        | 0.04        | 0.07        | 0.10        | 0.14        | 0.18        | 0.23        | 0.28        | 0.34        | 0.40        | 0.46        | 0.52        | 0.58        | 0.64        | 0.70        | 0.76        | 0.82        | 0.88        | 0.94        | 1.00         | 1.06        | 1.12         |
| 2   | 0.01         | 0.02        | 0.05        | 0.10        | 0.15        | 0.20        | 0.26        | 0.32        | 0.38        | 0.44        | 0.50        | 0.56        | 0.62        | 0.68        | 0.74        | 0.80        | 0.86        | 0.92        | 0.98        | 1.04        | 1.10        | 1.16         | 1.22        | 1.28         |
| 3   | 0.07         | 0.10        | 0.16        | 0.22        | 0.28        | 0.34        | 0.40        | 0.46        | 0.52        | 0.58        | 0.64        | 0.70        | 0.76        | 0.82        | 0.88        | 0.94        | 1.00        | 1.06        | 1.12        | 1.18        | 1.24        | 1.30         | 1.36        | 1.42         |
| 4   | 0.14         | 0.18        | 0.26        | 0.34        | 0.42        | 0.50        | 0.58        | 0.66        | 0.74        | 0.82        | 0.90        | 0.98        | 1.06        | 1.14        | 1.22        | 1.30        | 1.38        | 1.46        | 1.54        | 1.62        | 1.70        | 1.78         | 1.86        | 1.94         |
| 5   | 0.22         | 0.28        | 0.38        | 0.48        | 0.58        | 0.68        | 0.78        | 0.88        | 0.98        | 1.08        | 1.18        | 1.28        | 1.38        | 1.48        | 1.58        | 1.68        | 1.78        | 1.88        | 1.98        | 2.08        | 2.18        | 2.28         | 2.38        | 2.48         |
| 6   | 0.30         | 0.37        | 0.48        | 0.59        | 0.70        | 0.81        | 0.92        | 1.03        | 1.14        | 1.25        | 1.36        | 1.47        | 1.58        | 1.69        | 1.80        | 1.91        | 2.02        | 2.13        | 2.24        | 2.35        | 2.46        | 2.57         | 2.68        | 2.79         |
| 7   | 0.38         | 0.46        | 0.58        | 0.70        | 0.82        | 0.94        | 1.06        | 1.18        | 1.30        | 1.42        | 1.54        | 1.66        | 1.78        | 1.90        | 2.02        | 2.14        | 2.26        | 2.38        | 2.50        | 2.62        | 2.74        | 2.86         | 2.98        | 3.10         |
| 8   | 0.46         | 0.55        | 0.68        | 0.81        | 0.94        | 1.07        | 1.20        | 1.33        | 1.46        | 1.59        | 1.72        | 1.85        | 1.98        | 2.11        | 2.24        | 2.37        | 2.50        | 2.63        | 2.76        | 2.89        | 3.02        | 3.15         | 3.28        | 3.41         |
| 9   | 0.54         | 0.64        | 0.78        | 0.92        | 1.06        | 1.20        | 1.34        | 1.48        | 1.62        | 1.76        | 1.90        | 2.04        | 2.18        | 2.32        | 2.46        | 2.60        | 2.74        | 2.88        | 3.02        | 3.16        | 3.30        | 3.44         | 3.58        | 3.72         |
| 10  | 0.62         | 0.73        | 0.88        | 1.03        | 1.18        | 1.33        | 1.48        | 1.63        | 1.78        | 1.93        | 2.08        | 2.23        | 2.38        | 2.53        | 2.68        | 2.83        | 2.98        | 3.13        | 3.28        | 3.43        | 3.58        | 3.73         | 3.88        | 4.03         |
| 11  | 0.70         | 0.82        | 0.98        | 1.14        | 1.30        | 1.46        | 1.62        | 1.78        | 1.94        | 2.10        | 2.26        | 2.42        | 2.58        | 2.74        | 2.90        | 3.06        | 3.22        | 3.38        | 3.54        | 3.70        | 3.86        | 4.02         | 4.18        | 4.34         |
| 12  | 0.78         | 0.91        | 1.08        | 1.25        | 1.42        | 1.59        | 1.76        | 1.93        | 2.10        | 2.27        | 2.44        | 2.61        | 2.78        | 2.95        | 3.12        | 3.29        | 3.46        | 3.63        | 3.80        | 3.97        | 4.14        | 4.31         | 4.48        | 4.65         |
| 13  | 0.86         | 1.00        | 1.18        | 1.36        | 1.54        | 1.72        | 1.90        | 2.08        | 2.26        | 2.44        | 2.62        | 2.80        | 2.98        | 3.16        | 3.34        | 3.52        | 3.70        | 3.88        | 4.06        | 4.24        | 4.42        | 4.60         | 4.78        | 4.96         |
| 14  | 0.94         | 1.09        | 1.28        | 1.47        | 1.66        | 1.85        | 2.04        | 2.23        | 2.42        | 2.61        | 2.80        | 2.99        | 3.18        | 3.37        | 3.56        | 3.75        | 3.94        | 4.13        | 4.32        | 4.51        | 4.70        | 4.89         | 5.08        | 5.27         |
| 15  | 1.02         | 1.18        | 1.38        | 1.58        | 1.78        | 1.98        | 2.18        | 2.38        | 2.58        | 2.78        | 2.98        | 3.18        | 3.38        | 3.58        | 3.78        | 3.98        | 4.18        | 4.38        | 4.58        | 4.78        | 4.98        | 5.18         | 5.38        | 5.58         |
| 16  | 1.10         | 1.27        | 1.48        | 1.69        | 1.90        | 2.11        | 2.32        | 2.53        | 2.74        | 2.95        | 3.16        | 3.37        | 3.58        | 3.79        | 4.00        | 4.21        | 4.42        | 4.63        | 4.84        | 5.05        | 5.26        | 5.47         | 5.68        | 5.89         |
| 17  | 1.18         | 1.36        | 1.58        | 1.80        | 2.02        | 2.24        | 2.46        | 2.68        | 2.90        | 3.12        | 3.34        | 3.56        | 3.78        | 4.00        | 4.22        | 4.44        | 4.66        | 4.88        | 5.10        | 5.32        | 5.54        | 5.76         | 5.98        | 6.20         |
| 18  | 1.26         | 1.45        | 1.68        | 1.91        | 2.14        | 2.37        | 2.60        | 2.83        | 3.06        | 3.29        | 3.52        | 3.75        | 3.98        | 4.21        | 4.44        | 4.67        | 4.90        | 5.13        | 5.36        | 5.59        | 5.82        | 6.05         | 6.28        | 6.51         |
| 19  | 1.34         | 1.54        | 1.78        | 2.02        | 2.26        | 2.50        | 2.74        | 2.98        | 3.22        | 3.46        | 3.70        | 3.94        | 4.18        | 4.42        | 4.66        | 4.90        | 5.14        | 5.38        | 5.62        | 5.86        | 6.10        | 6.34         | 6.58        | 6.82         |
| 20  | 1.42         | 1.63        | 1.88        | 2.13        | 2.38        | 2.63        | 2.88        | 3.13        | 3.38        | 3.63        | 3.88        | 4.13        | 4.38        | 4.63        | 4.88        | 5.13        | 5.38        | 5.63        | 5.88        | 6.13        | 6.38        | 6.63         | 6.88        | 7.13         |
| 21  | 1.50         | 1.72        | 2.00        | 2.26        | 2.52        | 2.78        | 3.04        | 3.30        | 3.56        | 3.82        | 4.08        | 4.34        | 4.60        | 4.86        | 5.12        | 5.38        | 5.64        | 5.90        | 6.16        | 6.42        | 6.68        | 6.94         | 7.20        | 7.46         |
| 22  | 1.58         | 1.81        | 2.10        | 2.37        | 2.64        | 2.91        | 3.18        | 3.45        | 3.72        | 3.99        | 4.26        | 4.53        | 4.80        | 5.07        | 5.34        | 5.61        | 5.88        | 6.15        | 6.42        | 6.69        | 6.96        | 7.23         | 7.50        | 7.77         |
| 23  | 1.66         | 1.90        | 2.20        | 2.48        | 2.76        | 3.04        | 3.32        | 3.60        | 3.88        | 4.16        | 4.44        | 4.72        | 5.00        | 5.28        | 5.56        | 5.84        | 6.12        | 6.40        | 6.68        | 6.96        | 7.24        | 7.52         | 7.80        | 8.08         |
| 24  | 1.74         | 2.00        | 2.30        | 2.59        | 2.88        | 3.17        | 3.46        | 3.75        | 4.04        | 4.33        | 4.62        | 4.91        | 5.20        | 5.49        | 5.78        | 6.07        | 6.36        | 6.65        | 6.94        | 7.23        | 7.52        | 7.81         | 8.10        | 8.39         |
| 25  | 1.82         | 2.09        | 2.40        | 2.70        | 3.00        | 3.30        | 3.60        | 3.90        | 4.20        | 4.50        | 4.80        | 5.10        | 5.40        | 5.70        | 6.00        | 6.30        | 6.60        | 6.90        | 7.20        | 7.50        | 7.80        | 8.10         | 8.40        | 8.70         |
| 26  | 1.90         | 2.18        | 2.50        | 2.81        | 3.12        | 3.43        | 3.74        | 4.05        | 4.36        | 4.67        | 4.98        | 5.29        | 5.60        | 5.91        | 6.22        | 6.53        | 6.84        | 7.15        | 7.46        | 7.77        | 8.08        | 8.39         | 8.70        | 9.01         |
| 27  | 1.98         | 2.27        | 2.60        | 2.92        | 3.24        | 3.56        | 3.88        | 4.20        | 4.52        | 4.84        | 5.16        | 5.48        | 5.80        | 6.12        | 6.44        | 6.76        | 7.08        | 7.40        | 7.72        | 8.04        | 8.36        | 8.68         | 9.00        | 9.32         |
| 28  | 2.06         | 2.36        | 2.70        | 3.03        | 3.36        | 3.69        | 4.02        | 4.35        | 4.68        | 5.01        | 5.34        | 5.67        | 6.00        | 6.33        | 6.66        | 6.99        | 7.32        | 7.65        | 7.98        | 8.31        | 8.64        | 8.97         | 9.30        | 9.63         |
| 29  | 2.14         | 2.45        | 2.80        | 3.14        | 3.48        | 3.82        | 4.16        | 4.50        | 4.84        | 5.18        | 5.52        | 5.86        | 6.20        | 6.54        | 6.88        | 7.22        | 7.56        | 7.90        | 8.24        | 8.58        | 8.92        | 9.26         | 9.60        | 9.94         |
| 30  | 2.22         | 2.54        | 2.90        | 3.25        | 3.60        | 3.95        | 4.30        | 4.65        | 5.00        | 5.35        | 5.70        | 6.05        | 6.40        | 6.75        | 7.10        | 7.45        | 7.80        | 8.15        | 8.50        | 8.85        | 9.20        | 9.55         | 9.90        | 10.25        |
| 31  | 2.30         | 2.63        | 3.00        | 3.36        | 3.72        | 4.08        | 4.44        | 4.80        | 5.16        | 5.52        | 5.88        | 6.24        | 6.60        | 6.96        | 7.32        | 7.68        | 8.04        | 8.40        | 8.76        | 9.12        | 9.48        | 9.84         | 10.20       | 10.56        |
| 32  | 2.38         | 2.72        | 3.10        | 3.47        | 3.84        | 4.21        | 4.58        | 4.95        | 5.32        | 5.69        | 6.06        | 6.43        | 6.80        | 7.17        | 7.54        | 7.91        | 8.28        | 8.65        | 9.02        | 9.39        | 9.76        | 10.13        | 10.50       | 10.87        |
| 33  | 2.46         | 2.81        | 3.20        | 3.58        | 3.96        | 4.34        | 4.72        | 5.10        | 5.48        | 5.86        | 6.24        | 6.62        | 7.00        | 7.38        | 7.76        | 8.14        | 8.52        | 8.90        | 9.28        | 9.66        | 10.04       | 10.42        | 10.80       | 11.18        |
| 34  | 2.54         | 2.89        | 3.30        | 3.69        | 4.08        | 4.47        | 4.86        | 5.25        | 5.64        | 6.03        | 6.42        | 6.81        | 7.20        | 7.59        | 7.98        | 8.37        | 8.76        | 9.15        | 9.54        | 9.93        | 10.32       | 10.71        | 11.10       | 11.49        |
| 35  | 2.62         | 2.98        | 3.40        | 3.80        | 4.20        | 4.60        | 5.00        | 5.40        | 5.80        | 6.20        | 6.60        | 7.00        | 7.40        | 7.80        | 8.20        | 8.60        | 9.00        | 9.40        | 9.80        | 10.20       | 10.60       | 11.00        | 11.40       | 11.80        |
| 36  | 2.70         | 3.07        | 3.50        | 3.91        | 4.32        | 4.73        | 5.14        | 5.55        | 5.96        | 6.37        | 6.78        | 7.19        | 7.60        | 8.01        | 8.42        | 8.83        | 9.24        | 9.65        | 10.06       | 10.47       | 10.88       | 11.29        | 11.70       | 12.11        |
| 37  | 2.78         | 3.16        | 3.60        | 4.02        | 4.44        | 4.86        | 5.28        | 5.70        | 6.12        | 6.54        | 6.96        | 7.38        | 7.80        | 8.22        | 8.64        | 9.06        | 9.48        | 9.90        | 10.32       | 10.74       | 11.16       | 11.58        | 12.00       | 12.42        |
| 38  | 2.86         | 3.25        | 3.70        | 4.13        | 4.56        | 4.99        | 5.42        | 5.85        | 6.28        | 6.71        | 7.14        | 7.57        | 8.00        | 8.43        | 8.86        | 9.29        | 9.72        | 10.15       | 10.58       | 11.01       | 11.44       | 11.87        | 12.30       | 12.73        |
| 39  | 2.94         | 3.34        | 3.80        | 4.25        | 4.69        | 5.13        | 5.57        | 6.01        | 6.45        | 6.89        | 7.33        | 7.77        | 8.21        | 8.65        | 9.09        | 9.53        | 9.97        | 10.41       | 10.85       | 11.29       | 11.73       | 12.17        | 12.61       | 13.05        |
| 40  | 3.02         | 3.43        | 3.90        | 4.37        | 4.82        | 5.27        | 5.72        | 6.17        | 6.62        | 7.07        | 7.52        | 7.97        | 8.42        | 8.87        | 9.32        | 9.77        | 10.22       | 10.67       | 11.12       | 11.57       | 12.02       | 12.47        | 12.92       | 13.37        |
| 41  | 3.10         | 3.52        | 4.00        | 4.49        | 4.95        | 5.41        | 5.87        | 6.33        | 6.79        | 7.25        | 7.71        | 8.17        | 8.63        | 9.09        | 9.55        | 10.01       | 10.47       | 10.93       | 11.39       | 11.85       | 12.31       | 12.77        | 13.23       | 13.69        |
| 42  | 3.18         | 3.61        | 4.10        | 4.62        | 5.09        | 5.56        | 6.03        | 6.50        | 6.97        | 7.44        | 7.91        | 8.38        | 8.85        | 9.32        | 9.79        | 10.26       | 10.73       | 11.20       | 11.67       | 12.14       | 12.61       | 13.08        | 13.55       | 14.02        |
| 43  | 3.26         | 3.69        | 4.20        | 4.72        | 5.20        | 5.68        | 6.16        | 6.64        | 7.12        | 7.60        | 8.08        | 8.56        | 9.04        | 9.52        | 10.00       | 10.48       | 10.96       | 11.44       | 11.92       | 12.40       | 12.88       | 13.36        | 13.84       | 14.32        |
| 44  | 3.34         | 3.78        | 4.30        | 4.83        | 5.32        | 5.81        | 6.30        | 6.79        | 7.28        | 7.77        | 8.26        | 8.75        | 9.24        | 9.73        | 10.22       | 10.71       | 11.20       | 11.69       | 12.18       | 12.67       | 13.16       | 13.65        | 14.14       | 14.63        |
| 45  | 3.42         | 3.87        | 4.40        | 4.94        | 5.44        | 5.94        | 6.44        | 6.94        | 7.44        | 7.94        | 8.44        | 8.94        | 9.44        | 9.94        | 10.44       | 10.94       | 11.44       | 11.94       | 12.44       | 12.94       | 13.44       | 13.94        | 14.44       | 14.94        |
| 46  | 3.50         | 3.96        | 4.50        | 5.05        | 5.56        | 6.07        | 6.58        | 7.09        | 7.60        | 8.11        | 8.62        | 9.13        | 9.64        | 10.15       | 10.66       | 11.17       | 11.68       | 12.19       | 12.70       | 13.21       | 13.72       | 14.23        | 14.74       | 15.25        |
| 47  | 3.58         | 4.05        | 4.60        | 5.15        | 5.67        | 6.19        | 6.71        | 7.23        | 7.75        | 8.27        | 8.79        | 9.31        | 9.83        | 10.35       | 10.87       | 11.39       | 11.91       | 12.43       | 12.95       | 13.47       | 13.99       | 14.51        | 15.03       | 15.55        |
| 48  | 3.66         | 4.14        | 4.70        | 5.25        | 5.78        | 6.31        | 6.84        | 7.37        | 7.90        | 8.43        | 8.96        | 9.49        | 10.02       | 10.55       | 11.08       | 11.61       | 12.14       | 12.67       | 13.20       | 13.73       | 14.26       | 14.79        | 15.32       | 15.85        |
| 49  | 3.74         | 4.23        | 4.80        | 5.35        | 5.89        | 6.43        | 6.97        | 7.51        | 8.05        | 8.59        | 9.13        | 9.67        | 10.21       | 10.75       | 11.29       | 11.83       | 12.37       | 12.91       | 13.45       | 13.99       | 14.53       | 15.07        | 15.61       | 16.15        |
| 50  | 3.82         | 4.32        | 4.90        | 5.45        | 6.00        | 6.55        | 7.10        | 7.65        | 8.20        | 8.75        | 9.30        | 9.85        | 10.40       | 10.95       | 11.50       | 12.05       | 12.60       | 13.15       | 13.70       | 14.25       | 14.80       | 15.35        | 15.90       | 16.45        |
| 51  | 3.90         | 4.41        | 5.00        | 5.55        | 6.11        | 6.67        | 7.23        | 7.79        | 8.35        |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |              |             |              |