

## Ruído

**Por que os sinais de uma classe são apenas semelhantes, e não iguais ?**

### Hipóteses:

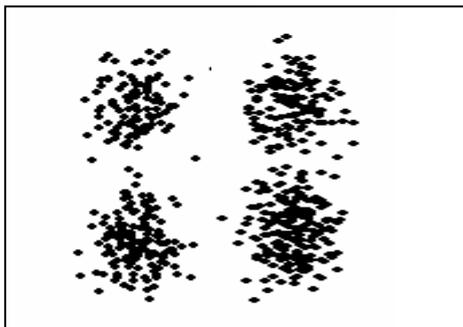
1 - Os elementos  $\underline{x}_j$  de uma classe  $C_j$  são constituídos pelo padrão  $\underline{m}_j$  da classe, ao qual foi adicionado um ruído  $\underline{r}_j$  característico da classe  $C_j$ .

$$\vec{x} \in C_j \quad \therefore \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j$$

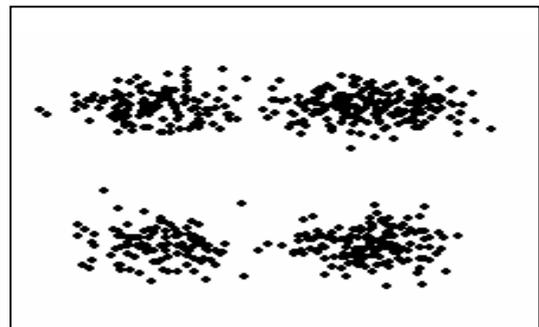
2 - O ruído  $\underline{r}_j$  é estocástico com média zero e distribuição aproximadamente gaussiana.

3 - As características do ruído independem da classe (ou não).

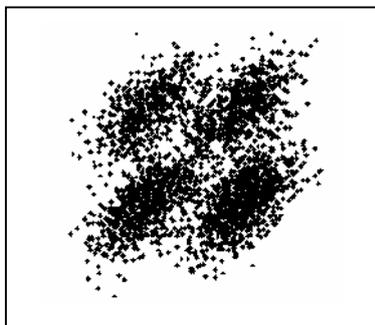
4 - Uma classe pode ser constituída por subclasses, às quais se aplicam as hipóteses acima.



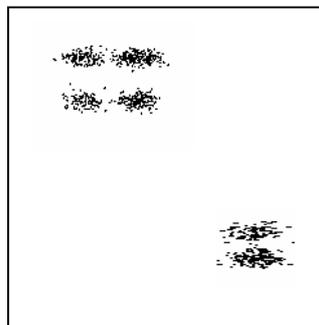
Ruído não correlato,  $\sigma_1 \cong \sigma_2$



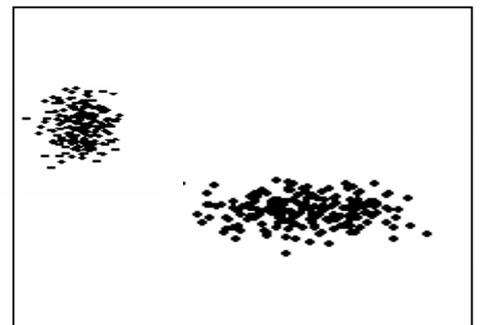
Ruído não correlato,  $\sigma_1 \neq \sigma_2$



Ruído correlato,  $x_1 = f(x_2)$   
atendida



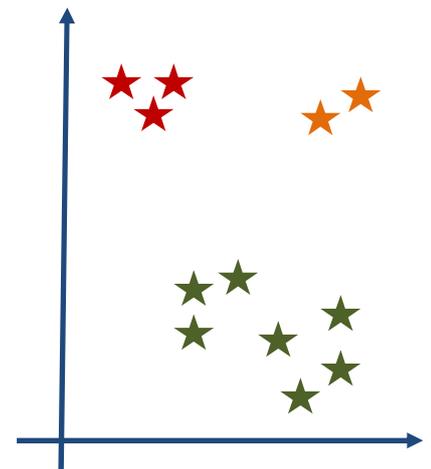
Classes compostas



Hipótese 3 não



## Classificação por similaridade



## Caracterização do ruído

### 1 - Caso supervisionado

As classes de cada entrada (elemento)  $\underline{x}$  são conhecidas. Neste caso seu baricentro  $\vec{m}_j$  também é conhecido

$$\vec{m}_j = \mathbf{E}_{\forall \vec{x}_i \in C_j} \vec{x}_i = \frac{1}{n_j} \sum_{\forall \vec{x}_i \in C_j} \vec{x}_i$$

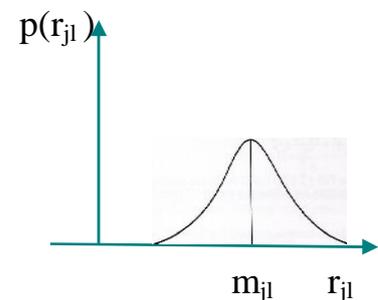
Pares entrada-saída  $[\vec{x}, C(\vec{x})]$

A caracterização do ruído de cada classe  $C_j$ ,  $\vec{r}_j$ , em cada dimensão  $l$ ,  $r_{jl}$ , pode ser realizada a partir da extração de  $\vec{r}_j$  das entradas pertencentes à classe

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j \quad \therefore \quad \vec{r}_j = \vec{x} - \vec{m}_j \quad e \quad r_{jl} = x_l - m_{jl}$$

A análise do conjunto das variáveis  $r_{jl}$  permite conhecer sua distribuição, seu valor eficaz  $\sigma$ , sua correlação com o ruído nas demais dimensões  $r_{jk} \mid k \neq l$ , etc.

Isto permitirá descorrelacionar os ruídos das diferentes dimensões, normalizar o valor eficaz por dimensão, etc., obtendo um conjunto de dados muito mais simples de classificar, como será visto mais tarde.



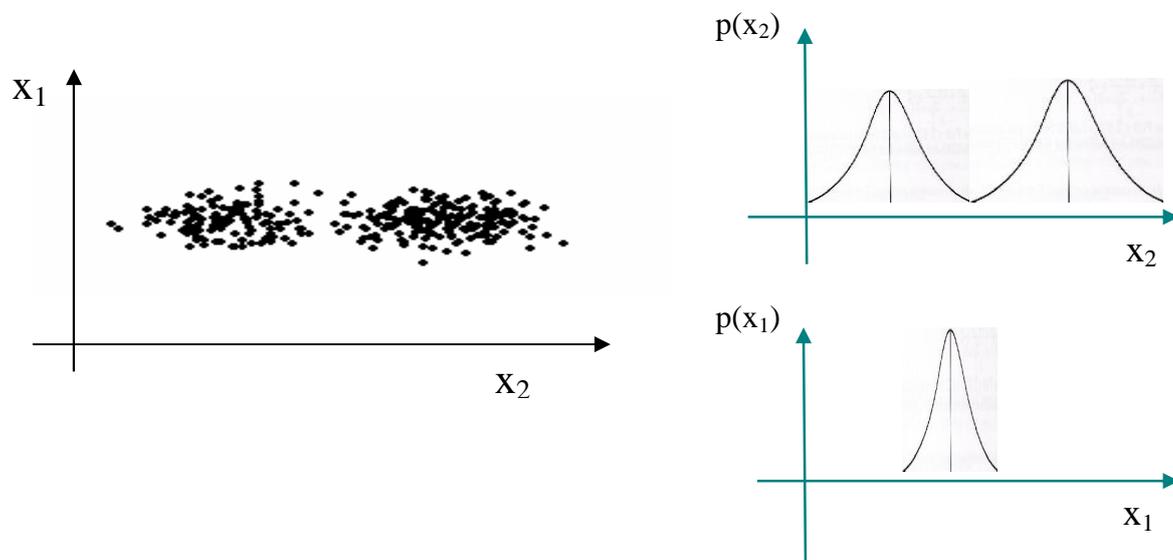
## 2 - Caso não supervisionado

**As classes de cada entrada (elemento) x não são conhecidas**

Se as classes apresentarem uma dispersão inter classes (distância) razoavelmente maior que intra classe (diâmetros) a análise de  $p(x)$  em cada dimensão pode (eventualmente) indicar as características de cada classe em cada dimensão (centro, ruído, etc.).

Para uma classe 
$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

Para N classes 
$$p(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$



?

**Tentativa e erro por clusterização experimental.**

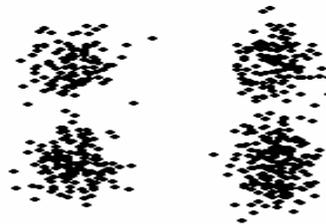
**Outras técnicas**

### 3 – Ruído - caso ideal

#### Classes com ruídos por componente com mesma variância e não correlatos - Classes esféricas

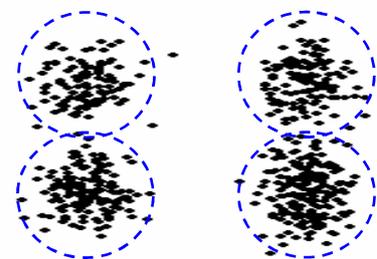
*Considerando o caso em que:*

- As classes foram geradas a partir de padrões adicionados de ruído aproximadamente gaussiano com média nula.
- que o valor rms (desvio padrão) do ruído de cada componente  $x_j$  é  $\sigma$ , independente da componente e da classe.



então

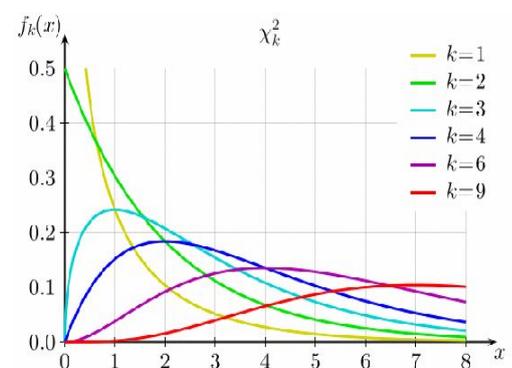
o separador ideal para as classes são esferas, que são também o separador natural por similaridade dos processos não supervisionados.



Se o ruído em cada dimensão é gaussiano com  $\sigma = 1$  então as classes tem raio tal que  $r_0^2$  tem distribuição chi-quadrado.

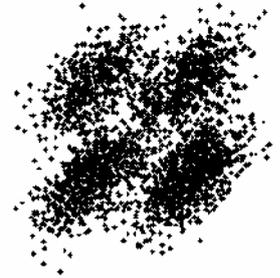
Em consequência o valor de  $r_0^2$  deve ser escolhido baseado nesta distribuição

Tentaremos chegar próximo a esta condição através do pré-processamento



#### 4 - Branqueamento do Ruído – gerando classes esféricas *classes sphereing*

Se os ruídos das componentes forem correlatos os domínios das classes serão elipsoides e estarão contidos por esferas maiores, que incluem espaços da não classe.



O branqueamento do ruído leva a classes esféricas, que permitirá o uso de um classificador muito mais simples. O branqueamento do ruído dos dados é obtido em duas etapas.

Inicialmente a decorrelação dos ruídos  $r_i$  deve ser obtida representando os dados  $\underline{x}$  (padrão da classe + ruído) em uma base  $\underline{B}$  do espaço das componentes principais (PCA) do ruído  $\underline{r}$  de cada dado de entrada (**PCA dos ruídos, e não dos sinais!**). Calcular as PCA de  $\underline{r}$  e a matriz de mapeamento  $\underline{B}$  do ruído  $\underline{r}$  em sua PCA  $\underline{p}$

$$\vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j \quad \therefore \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j$$

Utilizando  $\underline{B}$  determinamos o mapeamento de cada ruído  $\underline{r}$  em sua PCA  $\underline{p}$

$$\vec{p} = \underline{B}^t \vec{r} \quad \text{onde} \quad [B] = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \dots \ \vec{b}_m] \quad e \quad p_i = \vec{b}_i^t \vec{r}$$

e a variância de cada componente  $p_i$

$$\sigma_i^2 = E[p_i]^2 = E[\vec{b}_i^t \vec{r}]^2$$

A segunda etapa deve ser a equalização da potência do ruído nas diversas dimensões. A matriz de pesos  $\underline{\sigma}^{-1}$  para normalização das potências dos ruídos será

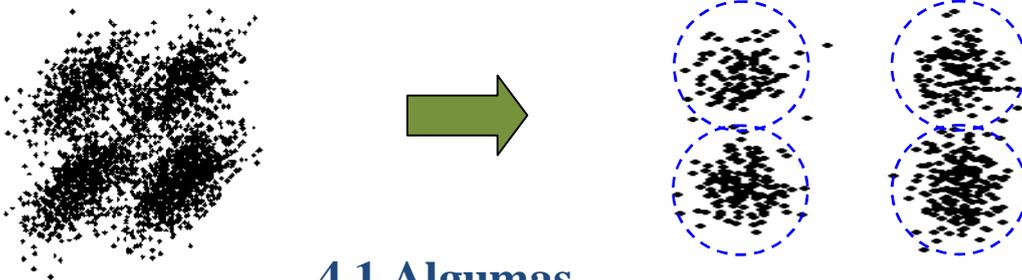
$$\underline{\sigma}^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_i} \right)$$

## Os novos dados à classificar serão

$$\vec{z} = \underline{\sigma}^{-1} \underline{B}^t \vec{x} = \underline{\sigma}^{-1} \underline{B}^t \vec{m}_j + \underline{\sigma}^{-1} \underline{B}^t \vec{r} = \vec{m}_{j_{novo}} + \vec{r}_{novo}$$

As classes passam a ter um novo padrão  $\vec{m}_{j_{novo}}$  adicionado de um ruído branco  $\vec{r}_{novo}$  com desvio padrão unitário.

$$\vec{m}_{j_{novo}} = \underline{\sigma}^{-1} \underline{B}^t \vec{m}_j \quad \vec{r}_{novo} = \underline{\sigma}^{-1} \underline{B}^t \vec{r} \quad \sigma(\vec{r}_{novo}) = \vec{1} = [1 \ 1 \ 1 \dots \ 1]^t$$



## 4.1 Algumas

### observações:

- A multiplicação por  $\underline{B}^t$  representa uma rotação e por isto não altera a posição relativa das classes, como será visto adiante. Mas a multiplicação por  $\underline{\sigma}^{-1}$  altera.
- Como  $\underline{B}$  é ortonormal e  $\underline{\sigma}^{-1}$  é diagonal o conhecimento da matriz branqueadora  $\underline{N}^t$  permite determinar  $\underline{B}$  e  $\underline{\sigma}^{-1}$

$$[\underline{N}]^t = [\vec{n}_1^t \ \vec{n}_2^t \ \vec{n}_3^t \ \dots \ \vec{n}_m^t] = \underline{\sigma}^{-1} [\vec{b}_1^t \ \vec{b}_2^t \ \vec{b}_3^t \ \dots \ \vec{b}_m^t]$$

$$\vec{n}_i^t \vec{n}_i = (\sigma_i^{-1} \vec{b}_i^t) (\sigma_i^{-1} \vec{b}_i) = \sigma_i^{-2} \quad e \quad \vec{b}_i = \sigma_i \vec{n}_i$$

- O uso de PCA sugere a eliminação de componentes pouco relevantes, i.e., com pequenos

$$\sigma_i^2 = E[p_i]^2 = E[\vec{b}_i^t \vec{r}]^2$$

e a consequente redução da dimensionalidade e simplificação do classificador. Entretanto, a eliminação de uma componente principal para  $\vec{r}_j$  somente pode ser feita se for pouco relevante para  $\vec{x}$ , isto é, se

$$\sigma^2(z_i) = E\left[\frac{1}{\sigma_i} \vec{b}_i^t \vec{x}\right]^2 \text{ for muito pequeno comparado com seus pares.}$$

**A relevância para  $\vec{x}$  é que determina a eliminação ou não da componente !**

- A multiplicação por P realiza um escalamento diferente por componente e pode alterar a classificação, principalmente se houver grande dispersão entre os  $\sigma_i$ , como será visto adiante,
- Caso os ruídos sejam não correlatos, a primeira etapa é obviamente desnecessária

$$\underline{B} = \underline{I}$$

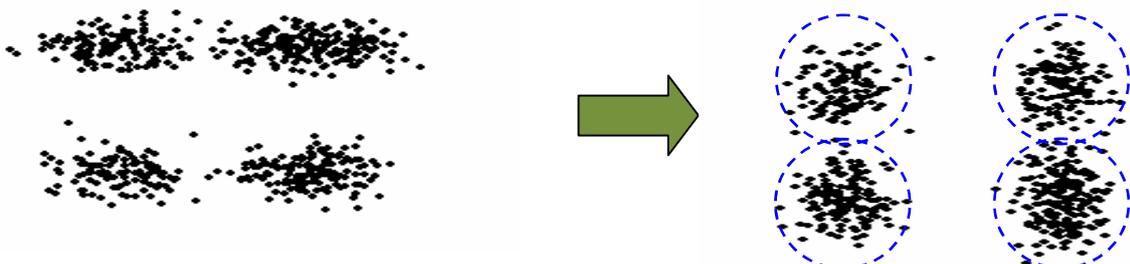


E a dispersão em cada dimensão  $i$  é dada por

$$\sigma_i^2 = E[r_i]^2 \quad \text{e} \quad \underline{\sigma}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)$$

**Os novos dados à classificar serão**

$$\vec{z} = \underline{\sigma}^{-1} \vec{x} = \underline{\sigma}^{-1} \vec{m}_j + \underline{\sigma}^{-1} \vec{r} = \vec{m}_{j_{novo}} + \vec{r}_{novo}$$



## 5. Algumas distribuições importantes:

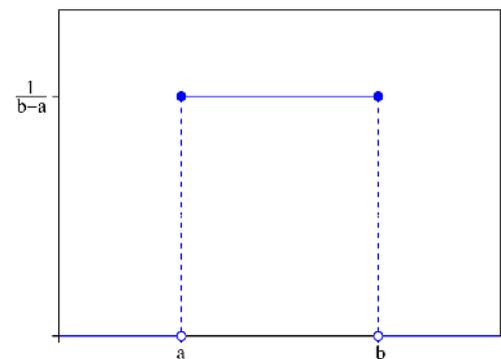
### 5.1 Distribuição uniforme

É a distribuição mais simples, a probabilidade de geração de um número em um intervalo  $[a, b]$  é constante e independe do número. É bastante usada na geração de números aleatórios em programas computacionais, como por exemplo para a geração dos valores iniciais aleatórios das sinapses de uma rede neural

**Função de distribuição (ou densidade) de probabilidade, f.d.p.**

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$



**No caso da geração de valores iniciais das sinapses**

$$w \in [-a, +a] \quad \mu = 0 \quad \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

**Função erro (uma das definições)**

**Função de distribuição de probabilidade acumulada**

$$erf(r_0) = p(r_i | r_i < r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} p(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } r_0 < a \\ \frac{r_0 - a}{b - a} & \text{se } a \leq r_0 \leq b \\ 1 & \text{se } r_0 > b \end{cases}$$

## 5.2 Distribuição Normal ou Gaussiana

A distribuição Normal ou Gaussiana é uma das distribuições de probabilidade mais utilizadas para modelar fenômenos da natureza porque um grande número destes fenômenos apresenta sua distribuição de probabilidade aproximadamente normal, por exemplo o ruído branco.

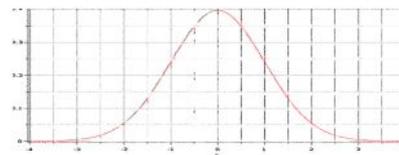
Em nosso caso consideramos que os elementos  $\underline{x}$  de uma classe  $C$  são compostos pelo padrão  $\underline{m}$  da classe adicionado de ruído branco  $\underline{r}$ .

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r} \quad \therefore$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j \quad e \quad r_i = x_i - m_{ij}$$

### Função de distribuição de probabilidade, f.d.p.

$$p(r_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}$$

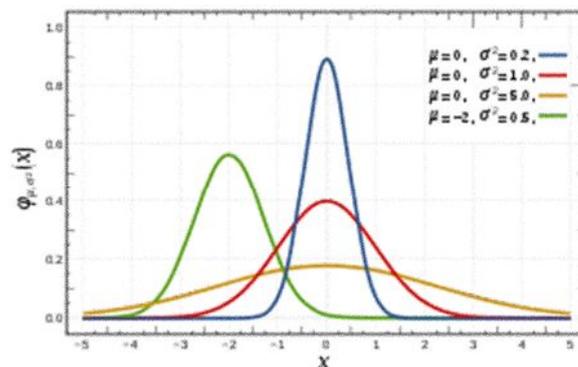


Média = mediana = moda

$$\mu = 0$$

Desvio padrão

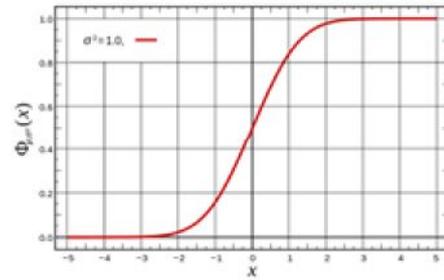
$$\sigma$$



Função erro (uma das definições)

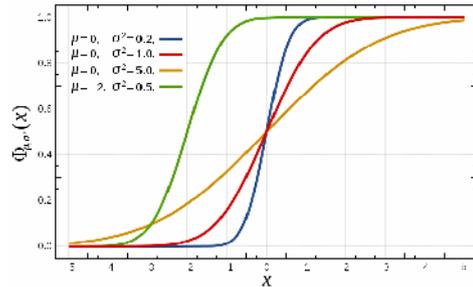
Função de distribuição acumulada

$$erf(r_0) = p(r_i | r_i < r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} p(t) dt$$



Sem expressão analítica,

tabelada para  $\sigma = 1$



Gaussiana e erf para  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$

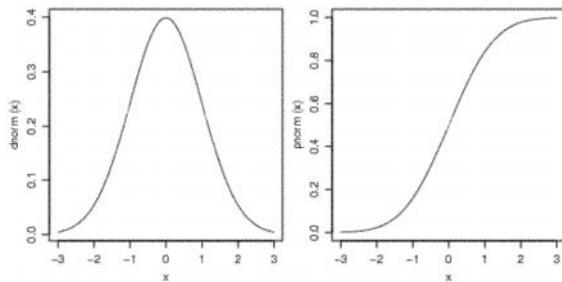


TABLE 47 AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE

From  $-\infty$  to  $z$

$$erf(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.2040	.5040	.5120	.5180	.5219	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.3989	.6438	.5478	.6517	.5557	.6596	.5636	.6675	.5712	.5751
0.2	.5793	.6832	.5871	.6910	.5948	.6987	.6026	.7064	.6103	.6141
0.3	.6179	.7217	.6255	.7293	.6331	.7370	.6406	.7443	.6481	.6517
0.4	.6554	.7591	.6589	.7627	.6626	.7664	.6661	.7700	.6697	.6734
0.5	.6772	.7809	.6809	.7846	.6848	.7884	.6848	.7924	.6917	.6952
0.6	.6988	.7924	.6944	.7979	.6964	.8013	.6994	.8041	.7024	.7059
0.7	.7088	.8023	.7048	.8073	.7058	.8109	.7084	.8154	.7104	.7139
0.8	.7179	.8113	.7154	.8178	.7164	.8229	.7184	.8299	.7204	.7239
0.9	.7279	.8211	.7264	.8284	.7274	.8354	.7294	.8429	.7304	.7339
1.0	.7379	.8309	.7374	.8398	.7384	.8479	.7394	.8514	.7404	.7439
1.1	.7479	.8409	.7474	.8498	.7484	.8579	.7494	.8614	.7504	.7539
1.2	.7579	.8509	.7574	.8598	.7584	.8679	.7594	.8714	.7604	.7639
1.3	.7679	.8609	.7674	.8698	.7684	.8779	.7694	.8814	.7704	.7739
1.4	.7779	.8709	.7774	.8798	.7784	.8879	.7794	.8914	.7804	.7839
1.5	.7879	.8809	.7874	.8898	.7884	.8979	.7894	.9014	.7904	.7939
1.6	.7979	.8909	.7974	.8998	.7984	.9079	.7994	.9114	.8004	.8039
1.7	.8079	.9009	.8074	.9098	.8084	.9179	.8094	.9214	.8104	.8139
1.8	.8179	.9109	.8174	.9198	.8184	.9279	.8194	.9314	.8204	.8239
1.9	.8279	.9209	.8274	.9298	.8284	.9379	.8294	.9414	.8304	.8339
2.0	.8379	.9309	.8374	.9398	.8384	.9479	.8394	.9514	.8404	.8439
2.1	.8479	.9409	.8474	.9498	.8484	.9579	.8494	.9614	.8504	.8539
2.2	.8579	.9509	.8574	.9598	.8584	.9679	.8594	.9714	.8604	.8639
2.3	.8679	.9609	.8674	.9698	.8684	.9779	.8694	.9814	.8704	.8739
2.4	.8779	.9709	.8774	.9798	.8784	.9879	.8794	.9914	.8804	.8839
2.5	.8879	.9809	.8874	.9898	.8884	.9979	.8894	.9914	.8904	.8939
2.6	.8979	.9909	.8974	.9998	.8984	.9979	.8994	.9914	.9004	.9039
2.7	.9079	.9909	.9074	.9998	.9084	.9979	.9094	.9914	.9104	.9139
2.8	.9179	.9909	.9174	.9998	.9184	.9979	.9194	.9914	.9204	.9239
2.9	.9279	.9909	.9274	.9998	.9284	.9979	.9294	.9914	.9304	.9339
3.0	.9379	.9909	.9374	.9998	.9384	.9979	.9394	.9914	.9404	.9439
3.1	.9479	.9909	.9474	.9998	.9484	.9979	.9494	.9914	.9504	.9539
3.2	.9579	.9909	.9574	.9998	.9584	.9979	.9594	.9914	.9604	.9639
3.3	.9679	.9909	.9674	.9998	.9684	.9979	.9694	.9914	.9704	.9739
3.4	.9779	.9909	.9774	.9998	.9784	.9979	.9794	.9914	.9804	.9839
3.5	.9879	.9909	.9874	.9998	.9884	.9979	.9894	.9914	.9904	.9939
3.6	.9979	.9909	.9974	.9998	.9984	.9979	.9994	.9914	.9904	.9939
3.7	.9979	.9909	.9974	.9998	.9984	.9979	.9994	.9914	.9904	.9939
3.8	.9979	.9909	.9974	.9998	.9984	.9979	.9994	.9914	.9904	.9939
3.9	.9979	.9909	.9974	.9998	.9984	.9979	.9994	.9914	.9904	.9939

### 5.3 Distribuição Chi-quadrado $\chi_k^2$

A distribuição qui-quadrado é importante porque permite calcular a probabilidade de uma entrada  $\underline{x}$  afetada de ruído branco  $\underline{r}$  estar a uma distância  $\underline{d}$  do padrão da classe  $\underline{m}$ , isto é, permite estimar a probabilidade da similaridade de uma entrada com seu padrão.

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r} \quad \therefore \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j$$

$$r_i = x_i - m_{ij} \quad e$$

$$d^2 = |\vec{x} - \vec{m}_j|^2 = |\vec{r}|^2 = \sum_{i=1}^k r_i^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - m_{ij})^2 = -u$$

Para o caso ideal, com todos os  $r_i$  não correlatos e com  $\sigma_i = 1$

em cada dimensão  $i$  de  $\vec{x}$   $d_i^2 = r_i^2 = -u_i$

distribuição  $\chi_1^2$  com 1(um) grau de liberdade

em todas as  $k$  dimensões de  $\vec{x}$   $d^2 = \sum_{j=1}^k r_j^2 = -u$

distribuição  $\chi_k^2$  com  $k$  graus de liberdade

## Função densidade de probabilidade $\chi_k^2$

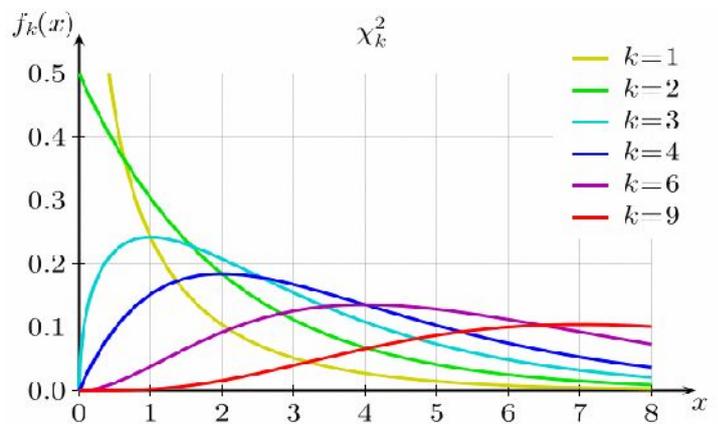
$$p(r) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} r^{k/2-1} e^{-r/2}$$

média =  $k$

$$\text{mediana} = \approx k \left(1 - \frac{2}{9k}\right)^3$$

$$\text{moda} = \max[0, (k-2)]$$

variância =  $2k$

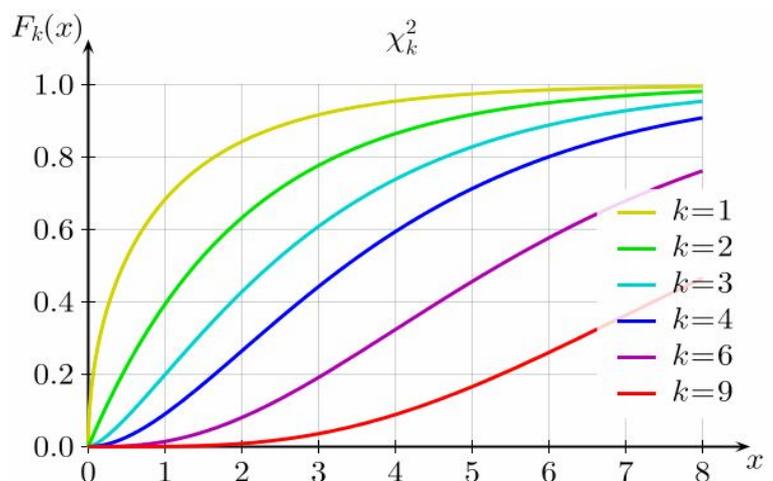


## Função erro (uma das definições) de $\chi_k^2$

### Função de distribuição de probabilidade acumulada

$$\text{erf}(r_0) = p(r | r < r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} p(t) dt = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{r_0}{2}\right)$$

tabelada para diversos k



**TABLE 49** PERCENTILE VALUES (10) FOR THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION with  $\nu$  degrees of freedom

$\nu$	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.85}$	$\chi^2_{.80}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.70}$	$\chi^2_{.65}$	$\chi^2_{.60}$	$\chi^2_{.55}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.45}$	$\chi^2_{.40}$	$\chi^2_{.35}$	$\chi^2_{.30}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.20}$	$\chi^2_{.15}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.004	0.008	0.016	0.020	0.216	0.354	0.455	0.501	0.540	0.574	0.602	0.635	0.663	0.688	0.711	0.732	0.752	0.770	0.787	0.803	0.819	0.835	0.851	0.867
2	0.010	0.020	0.051	0.076	0.216	0.354	0.455	0.501	0.540	0.574	0.602	0.635	0.663	0.688	0.711	0.732	0.752	0.770	0.787	0.803	0.819	0.835	0.851	0.867
3	0.078	0.158	0.352	0.584	0.713	0.802	0.875	0.933	0.979	1.016	1.046	1.071	1.093	1.113	1.131	1.148	1.163	1.177	1.190	1.202	1.214	1.225	1.236	1.247
4	0.484	0.711	1.064	1.385	1.601	1.746	1.848	1.918	1.968	2.009	2.042	2.070	2.095	2.118	2.139	2.158	2.175	2.190	2.204	2.217	2.229	2.240	2.251	2.261
5	0.838	1.148	1.601	2.078	2.366	2.575	2.733	2.846	2.927	2.989	3.042	3.089	3.131	3.169	3.203	3.234	3.262	3.288	3.312	3.334	3.354	3.373	3.391	3.408
6	1.237	1.675	2.204	2.790	3.153	3.428	3.619	3.761	3.867	3.948	4.014	4.067	4.117	4.164	4.208	4.249	4.287	4.322	4.354	4.384	4.411	4.437	4.461	4.484
7	1.676	2.179	2.833	3.518	3.978	4.313	4.544	4.704	4.814	4.898	4.967	5.024	5.077	5.127	5.174	5.218	5.260	5.299	5.335	5.369	5.400	5.429	5.456	5.481
8	2.179	2.738	3.541	4.317	4.877	5.183	5.464	5.664	5.806	5.907	5.984	6.049	6.111	6.170	6.226	6.279	6.329	6.376	6.420	6.461	6.500	6.537	6.571	6.603
9	2.700	3.338	4.278	5.133	5.783	6.070	6.321	6.540	6.728	6.881	6.999	7.094	7.176	7.255	7.331	7.404	7.474	7.541	7.605	7.666	7.724	7.779	7.831	7.880
10	3.247	3.938	5.000	5.934	6.571	6.850	7.081	7.281	7.451	7.594	7.713	7.817	7.907	7.993	8.076	8.156	8.233	8.307	8.378	8.446	8.511	8.573	8.632	8.688
11	3.812	4.554	5.734	6.758	7.386	7.658	7.881	8.074	8.238	8.383	8.509	8.617	8.714	8.801	8.887	8.970	9.050	9.127	9.201	9.272	9.340	9.406	9.469	9.529
12	4.401	5.201	6.496	7.618	8.236	8.501	8.717	8.894	9.043	9.171	9.287	9.394	9.491	9.578	9.663	9.745	9.824	9.900	9.973	10.043	10.111	10.177	10.241	10.302
13	5.013	5.869	7.274	8.494	9.103	9.361	9.571	9.742	9.885	10.003	10.111	10.209	10.297	10.375	10.451	10.525	10.597	10.666	10.732	10.796	10.858	10.918	10.976	11.032
14	5.641	6.554	8.069	9.387	10.086	10.338	10.543	10.708	10.845	10.965	11.074	11.172	11.260	11.338	11.414	11.487	11.558	11.626	11.691	11.754	11.815	11.874	11.931	11.986
15	6.277	7.246	8.779	10.194	10.893	11.140	11.348	11.517	11.657	11.778	11.887	11.985	12.073	12.151	12.227	12.299	12.368	12.434	12.497	12.558	12.617	12.674	12.729	12.782
16	6.921	7.947	9.496	10.909	11.608	11.851	12.053	12.217	12.350	12.472	12.581	12.679	12.767	12.845	12.912	12.977	13.040	13.100	13.158	13.214	13.268	13.320	13.371	13.420
17	7.572	8.645	10.201	11.612	12.311	12.551	12.757	12.925	13.061	13.184	13.293	13.391	13.479	13.557	13.624	13.688	13.750	13.809	13.865	13.919	13.971	14.022	14.071	14.118
18	8.230	9.350	10.913	12.321	13.020	13.257	13.457	13.620	13.758	13.882	13.991	14.089	14.177	14.255	14.322	14.386	14.447	14.506	14.562	14.616	14.668	14.719	14.768	14.815
19	8.895	10.062	11.631	13.038	13.737	13.972	14.167	14.325	14.456	14.572	14.680	14.778	14.866	14.944	15.011	15.075	15.136	15.194	15.250	15.304	15.356	15.407	15.456	15.503
20	9.548	10.762	12.338	13.753	14.452	14.685	14.876	15.030	15.156	15.265	15.363	15.451	15.529	15.606	15.672	15.736	15.797	15.856	15.912	15.966	16.018	16.069	16.118	16.165
21	10.200	11.450	13.029	14.468	15.167	15.400	15.587	15.737	15.860	15.969	16.067	16.155	16.233	16.310	16.376	16.439	16.499	16.557	16.613	16.667	16.719	16.769	16.817	16.863
22	10.860	12.146	13.726	15.083	15.782	16.014	16.200	16.347	16.467	16.567	16.655	16.733	16.810	16.886	16.951	17.014	17.075	17.134	17.191	17.246	17.299	17.350	17.400	17.448
23	11.528	12.849	14.441	15.697	16.396	16.627	16.811	16.955	17.072	17.170	17.258	17.335	17.411	17.486	17.550	17.612	17.672	17.729	17.784	17.837	17.888	17.937	17.984	18.029
24	12.203	13.560	15.154	16.312	17.011	17.241	17.423	17.564	17.678	17.774	17.861	17.937	18.012	18.086	18.149	18.210	18.269	18.326	18.381	18.434	18.485	18.534	18.581	18.626
25	12.884	14.276	15.864	16.927	17.626	17.855	18.035	18.174	18.286	18.380	18.465	18.540	18.614	18.687	18.750	18.811	18.870	18.927	18.981	19.033	19.083	19.131	19.177	19.221
26	13.571	14.999	16.567	17.639	18.338	18.566	18.744	18.881	18.990	19.083	19.167	19.241	19.314	19.386	19.448	19.508	19.566	19.622	19.676	19.728	19.778	19.826	19.872	19.916
27	14.264	15.729	17.269	18.151	18.850	19.077	19.253	19.388	19.494	19.585	19.668	19.741	19.813	19.884	19.945	19.999	20.055	20.109	20.161	20.211	20.259	20.305	20.349	20.392
28	14.962	16.464	17.974	18.855	19.554	19.780	19.954	20.087	20.190	20.279	20.360	20.432	20.503	20.573	20.633	20.690	20.745	20.798	20.849	20.898	20.945	20.990	21.033	21.074
29	15.665	17.204	18.683	19.564	20.263	20.488	20.660	20.791	20.892	20.979	21.059	21.130	21.199	21.267	21.324	21.378	21.430	21.480	21.528	21.574	21.618	21.660	21.701	21.740
30	16.372	17.948	19.385	20.265	20.964	21.188	21.358	21.487	21.586	21.671	21.749	21.819	21.887	21.953	22.008	22.061	22.112	22.161	22.208	22.253	22.296	22.337	22.376	22.413
31	17.083	18.696	20.084	20.985	21.684	21.907	22.076	22.203	22.299	22.375	22.443	22.509	22.573	22.635	22.695	22.752	22.807	22.860	22.911	22.960	23.007	23.052	23.095	23.136
32	17.797	19.448	20.781	21.686	22.385	22.607	22.775	22.900	22.994	23.068	23.134	23.198	23.260	23.320	23.378	23.433	23.486	23.537	23.586	23.633	23.678	23.721	23.762	23.801
33	18.514	20.204	21.476	22.387	23.086	23.307	23.474	23.600	23.692	23.765	23.829	23.891	23.951	24.009	24.065	24.118	24.169	24.218	24.265	24.310	24.353	24.394	24.433	24.470
34	19.234	20.964	22.169	23.088	23.787	24.007	24.173	24.297	24.388	24.460	24.523	24.584	24.643	24.699	24.753	24.805	24.855	24.903	24.949	24.993	25.035	25.075	25.113	25.149
35	19.956	21.728	22.863	23.589	24.288	24.507	24.672	24.795	24.885	24.956	25.017	25.076	25.133	25.188	25.241	25.292	25.341	25.388	25.433	25.476	25.517	25.556	25.593	25.628
36	20.680	22.496	23.557	24.290	24.989	25.207	25.371	25.493	25.582	25.652	25.711	25.768	25.823	25.876	25.927	25.976	26.023	26.068	26.111	26.152	26.191	26.228	26.263	26.297
37	21.406	23.268	24.250	25.001	25.700	25.917	26.080	26.201	26.289	26.358	26.415	26.470	26.523	26.574	26.623	26.670	26.715	26.758	26.799	26.838	26.875	26.910	26.943	26.975
38	22.133	24.044	24.941	25.692	26.391	26.607	26.769	26.889	26.976	27.044	27.100	27.153	27.204	27.253	27.300	27.345	27.388	27.429	27.468	27.505	27.540	27.573	27.604	27.634
39	22.861	24.824	25.637	26.483	27.182	27.397	27.558	27.677	27.763	27.830	27.885	27.937	27.987	28.035	28.081	28.125	28.167	28.207	28.245	28.281	28.315	28.347	28.377	28.406
40	23.590	25.608	26.411	27.174	27.873	28.087	28.247	28.365	28.450	28.516	28.570	28.621	28.670	28.717	28.762	28.805	28.846	28.885	28.922	28.957	28.990	29.021	29.050	29.078
41	24.320	26.396	27.197	27.989	28.688	28.901	29.060	29.177	29.261	29.326	29.379	29.429	29.476	29.521	29.564	29.605	29.644	29.681	29.716	29.749	29.780	29.809	29.836	29.862
42	25.051	27.188	27.987	28.779	29.478	29.690	29.848	29.964	30.048	30.112	30.165	30.214	30.260	30.304	30.346	30.386	30.424	30.460	30.494	30.526	30.556	30.584	30.610	30.635
43	25.783	27.984	28.781	29.573	30.272	30.483	30.640	30.755	30.838	30.901	30.953	31.000	31.044	31.086	31.126	31.164	31.199	31.232	31.263	31.292	31.319	31.344	31.368	31.391
44	26.516	28.784	29.579	30.371	31.070	31.280	31.436	31.550	31.632	31.694	31.746	31.790	31.832	31.872</										