

CPE 722 - 1ª série de exercícios - Agrupamentos

Obs: A resolução pode ser em grupo. Mas como série visa operar e consolidar os conceitos, é importante que cada um tente entender o problema e encontrar a sua solução.

1 – Os oito elementos à classificar apresentados a seguir são uni-dimensionais:

-3,2 -3,0 -0,7 0,0 0,8 2,0 2,4 2,9

1.1 - Calcule a média m e a dissimilaridade total F_0 do conjunto de elementos.

1.2 - Classifique os elementos usando um classificador k-means cujos três padrões iniciais são $-3,0$ $-0,7$ e $2,0$. Calcule o F_{in} e F_{out} obtidos a partir de suas fórmulas de definição, comprovando que sua soma é igual ao F_0 calculado anteriormente.

1.3 – Para a classificação obtida em 1.2 calcule a dispersão inter-classes pelo critério a) do vizinho mais próximo; b) do vizinho mais distante; c) da distância média entre elementos e d) da distância entre os baricentros.

1.4 - A partir do classificador obtido em 1.2 reduza o número de classes de uma unidade usando um algoritmo associativo. Que classes você escolhe para associar, e qual os F_{in} e F_{out} após a associação ?

1.5 – A partir do classificador obtido em 1.2 aumente o número de classes de uma unidade usando um algoritmo dissociativo. Que classe você escolhe para dissociar, e qual os F_{in} e F_{out} após a dissociação ?

1.6 – A partir dos resultados acima é possível concluir algo a respeito do nível do “agrupamento natural ótimo” ?

2 – Em uma camada de Kohonen o padrão \vec{w}^i da classe C_i deve ser tal que minimize o valor esperado da distância dos elementos pertencentes a C_i ao seu centro \vec{w}^i , e maximize o valor esperado da distância à \vec{w}^i das entradas não pertencentes a C_i . Para tanto é proposto minimizar a função objetivo:

$$F_i = \gamma \mathbf{E}_{\forall \vec{x}^j \in C_i} \|\vec{x}^j - \vec{w}^i\|^2 - (1 - \gamma) \mathbf{E}_{\forall \vec{x}^j \notin C_i} \|\vec{x}^j - \vec{w}^i\|^2, \quad 0 < \gamma < 1$$

Calcule \bar{w}^j minimante de F_i em função de

$$\bar{m}^k = \underset{\forall \bar{x}^j \in C_k}{E} \bar{x}^j, \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad \bar{m} = \underset{\forall \bar{x}^j}{E} \bar{x}^j$$

Obs: Se quiser, mostre que é possível trabalhar com cada componente dos vetores separadamente, e use esta propriedade.

3 - Considere um conjunto de classes C_i , $i = 1, 2, \dots$ com baricentros \underline{w}_i e raios de similaridade r_i respectivamente.

3.1 - Mostre que a equação do plano separador entre duas classes cujos centros são \underline{w}_j e \underline{w}_k pelo critério do padrão mais próximo (critério 1) é

$$2 \underline{x}^t (\underline{w}_j - \underline{w}_k) + |\underline{w}_k|^2 - |\underline{w}_j|^2 = 0$$

3.2 - Mostre que a equação da esfera separadora da classe k pelo critério de similaridade mínima (critério 2) é

$$\underline{x}^t (\underline{x} - 2\underline{w}_k) + |\underline{w}_k|^2 - r_k^2 = 0$$

3.3 - Mostre que o domínio da classe C_k com baricentro \underline{w}_k e raio de similaridade r_k pelos critérios de centro mais próximo (critério 1) e de similaridade mínima (critério 2) é definido por todo \underline{x} que satisfaz simultaneamente as inequações

$$\begin{aligned} \underline{x}^t (\underline{x} - 2\underline{w}_k) &\leq r_k^2 - |\underline{w}_k|^2 \\ 2\underline{x}^t (\underline{w}_i - \underline{w}_k) &\leq |\underline{w}_i|^2 - |\underline{w}_k|^2 \quad \forall i \neq k \end{aligned}$$

Observe que a pertinência a uma classe independe do raio de similaridade das demais classes.

4 – Mostre que a dispersão média intra classe da classe C_i classificada por uma camada de Kohonen pode ser calculada por

$$\sigma_i^2 = E_{\forall \underline{x} \in C_i} |\underline{x} - \underline{w}_i|^2 = - \frac{\sum_{\forall \bar{x}} y_i u_i}{\sum_{\forall \bar{x}} y_i}$$

note que os somatórios do segundo termo são sobre todos os elementos à classificar (e não apenas sobre os da classe C_i).

5 - Considere um classificador em que todas as entradas \underline{x} e todos os padrões de classe \underline{w}_i tem módulo unitário. Para este caso mostre que:

a - $u_i = \underline{x}^t \underline{w}_i$ é uma medida de similaridade entre \underline{x} e \underline{w}_i

b - a condição para que uma entrada \underline{x} pertença à uma classe com centro em \underline{w} e raio de similaridade r_0 é que $u_i = \underline{x}^t \underline{w}_i > 1 - (r_0^2 / 2)$.

6 - Em uma camada de Kohonen o vetor sinapse do i -ésimo neurônio é $\underline{w}_i = [w_{i1} \ w_{i2} \ \dots \ w_{in}]^t$. Após o treinamento verificou-se que as sinapses w_{i2} eram iguais para todo i . Estas sinapses foram então zeradas, e todas as demais mantidas com seus valores inalterados. Explique:

a - Isto modifica o funcionamento da rede como classificador (isto é, alguma entrada \underline{x} pode vir a ser classificada diferentemente) ?

b - Se estava sendo usado um neurônio com excitação constante u_0 para delimitar o raio das classes, isto continua a valer ? Interprete.