

CPE 722 2012 - 1ª série de exercícios

Obs: A resolução pode ser em grupo. Mas como série visa operar e consolidar os conceitos, é importante que cada um tente entender o problema e encontrar a sua solução.

1 – Os nove elementos à classificar apresentados a seguir são uni-dimensionais:

-3,2 -3,0 -0,7 0,0 0,8 2,0 2,4 2,9

1.1 - Calcule a média m e a dissimilaridade total F_0 do conjunto de elementos.

1.2 - Classifique os elementos usando um classificador k-means cujos três padrões iniciais são -3,0 -0,7 e 2,0. Calcule o F_{in} e F_{out} obtidos a partir de suas fórmulas de definição, comprovando que sua soma é igual ao F_0 calculado anteriormente.

1.3 – Para a classificação obtida em 1.2 calcule a dispersão intra-classes pelo critério a) do vizinho mais próximo; b) do vizinho mais distante; c) da distância média entre elementos e d) da distância entre os baricentros.

1.4 - A partir do classificador obtido em 1.2 reduza o número de classes de uma unidade usando um algoritmo associativo. Que classes você escolhe para associar, e qual os F_{in} e F_{out} após a associação ?

1.5 – A partir do classificador obtido em 1.2 aumente o número de classes de uma unidade usando um algoritmo dissociativo. Que classe você escolhe para dissociar, e qual os F_{in} e F_{out} após a dissociação ?

1.6 – A partir dos resultados acima é possível concluir algo a respeito do nível do “agrupamento natural ótimo” ?

2 – Em uma camada de Kohonen o padrão $\vec{w}^i$ da classe C_i deve ser tal que minimize o valor esperado da distância dos elementos pertencentes a C_i ao seu centro $\vec{w}^i$, e maximize o valor esperado da distância à $\vec{w}^i$ das entradas não pertencentes a C_i . Para tanto é proposto minimizar a função objetivo:

$$F_i = \gamma \sum_{\forall \vec{x}^j \in C_i} \|\vec{x}^j - \vec{w}^i\|^2 - (1 - \gamma) \sum_{\forall \vec{x}^j \notin C_i} \|\vec{x}^j - \vec{w}^i\|^2, \quad 0 < \gamma < 1$$

Calcule $\vec{w}^i$ minimante de F_i em função de

$$\vec{m}^k = \sum_{\forall \vec{x}^j \in C_k} \vec{x}^j, \quad k = 1, 2, \dots \text{ e } \vec{m} = \sum_{\forall \vec{x}^j} \vec{x}^j$$

Obs: Se quiser, mostre que é possível trabalhar com cada componente dos vetores separadamente, e use esta propriedade.

3 - Mostre que a equação do plano separador entre duas classes cujos centros são $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ pelo critério do padrão mais próximo (critério 1) é

$$2 \underline{x}^t (\underline{w}_1 - \underline{w}_2) + |\underline{w}_1|^2 - |\underline{w}_2|^2 = 0$$

Obs: $\underline{x}^t$ é o transposto de $\underline{x}$

4 – Mostre que a dispersão média intra classe da classe C_i classificada por uma camada de Kohonen pode ser calculada por

$$\sigma_i^2 = - \frac{\sum_{\forall \underline{x}} y_i u_i}{\sum_{\forall \underline{x}} y_i}$$

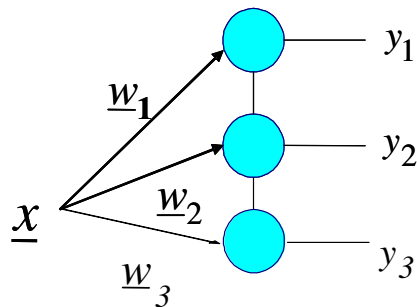
note que os somatórios são sobre todos os elementos à classificar (e não apenas sobre os da classe C_i).

5 – Para a camada de Kohonen abaixo, em treinamento não supervisionado simples com passo $\alpha = 0,1$ e

$$\underline{w}_1 = [0,50 \ 0,50 \ 0,71]^t$$

$$\underline{w}_2 = [0,30 \ 0,60 \ 0,74]^t$$

$$\underline{w}_3 = [0,30 \ 0,30 \ 0,91]^t$$



é apresentada a entrada $\underline{x} = [0,40 \ 0,50 \ 0,77]^t$ Quais os novos valores das sinapses após a atualização ?

6 - Considere um classificador em que todas as entradas $\underline{x}$ e todos os padrões de classe $\underline{w}_i$ tem módulo unitário. Para este caso mostre que:

a – $u_i = \underline{x}^t \underline{w}_i$ é uma medida de similaridade entre $\underline{x}$ e $\underline{w}_i$

b - a condição para que uma entrada $\underline{x}$ pertença à uma classe com centro em $\underline{w}$ e raio de similaridade r_0 é que $u_i = \underline{x}^t \underline{w}_i > 1 - (r_0^2 / 2)$.

7 - Em uma camada de Kohonen o vetor sinapse do i -ésimo neurônio é $\underline{w}_i = [w_{i1} \ w_{i2} \ \dots \ w_{in}]^t$. Após o treinamento verificou-se que as sinapses w_{i2} eram iguais para todo i . Estas sinapses foram então zeradas, e todas as demais mantidas com seus valores inalterados. Explique:

a - Isto modifica o funcionamento da rede como classificador (isto é, alguma entrada $\underline{x}$ pode vir a ser classificada diferentemente) ?

b - Se estava sendo usado um neurônio com excitação constante u_0 para delimitar o raio das classes, isto continua a valer ? Interprete.

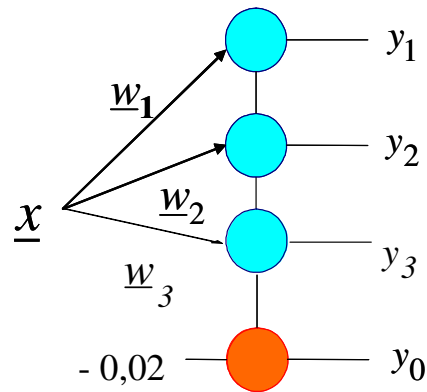
8 – A rede ART abaixo recebe um treinamento com $\alpha = 0,1$, iniciado com a seguinte sequência de entradas:

$$\underline{x}_1 = [0,550 \ 0,500 \ 0,669]^t$$

$$\underline{x}_2 = [0,500 \ 0,500 \ 0,707]^t$$

$$\underline{x}_3 = [0,400 \ 0,400 \ 0,825]^t$$

$$\underline{x}_4 = [0,500 \ 0,500 \ 0,707]^t$$



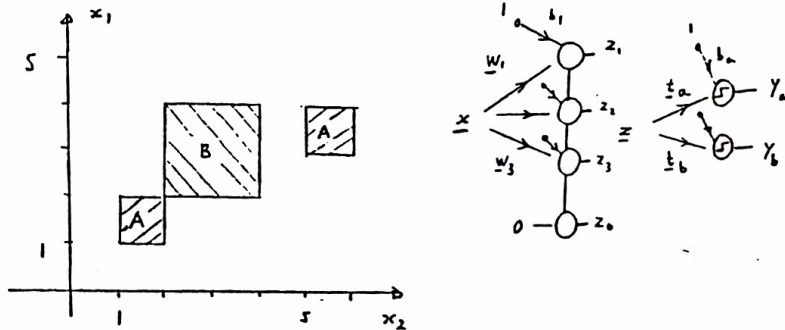
a – Apresente os valores das sinapses ao longo dos cinco passos de treinamento.

b – Se a ordem de apresentação das entradas for alterada os vetores sinapse após os quatro passos de treinamento podem ser diferentes ? Se sim, isto ocorre sempre ? Se não, isto nunca ocorre ?

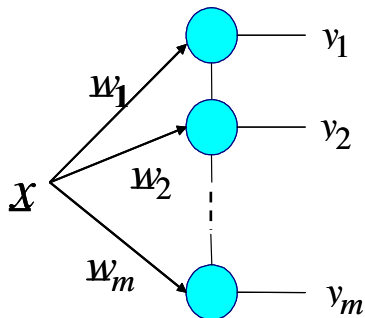
9 - Um neurônio tipo $\tilde{y} = \text{sign}(u)$, $u = \underline{w}^t \underline{x} + b$, recebe uma entrada $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$ onde $x_i \in \{-1, 1\}$. Este neurônio deve separar o vértice do hipercubo “lógico” $[-1 \ +1 \ -1 \ +1 \ \dots \ (-1)^n]$ e seus adjacentes (isto é, que só tem uma componente diferente) dos demais vértices. Calcule o vetor sinapse $\underline{w}$ e a polarização b . Obs.: Este neurônio realiza um separador esférico (ver exercício 6).

$$\text{Obs: } \text{sign}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \geq 0 \\ -1 & \text{se } u < 0 \end{cases}$$

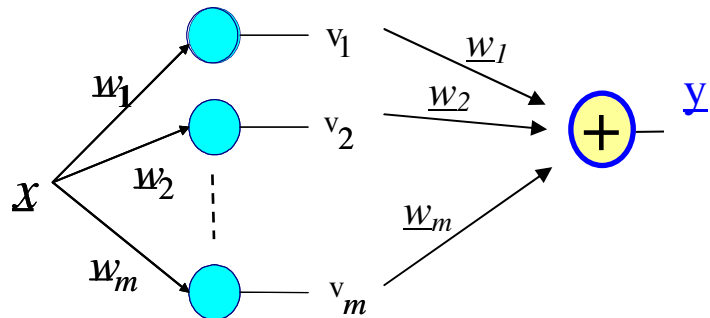
10 - As duas classes A e B na figura abaixo devem ser separadas pela rede counterpropagation abaixo da forma mais eficiente possível. Os neurônios da segunda camada são do tipo $\tilde{y} = \text{sign}(u)$, $u = \underline{w}^t \underline{x} + b$. Projete a rede.



11 - Considere uma rede counterpropagation usada como um aproximador.



Rede em treinamento



Rede em operação

Inicialmente a camada de Kohonen é treinada e são determinados os vetores sinapse $\underline{w}_i$. Em seguida, para operação, são feitas as seguintes alterações:

(a) cada neurônio passa a operar de forma independente dos demais, com função de excitação u e função de ativação v definidas abaixo e (b) um somador vetorial é adicionado para produzir a saída y também definida abaixo

$$u_i = -|\underline{\bar{x}} - \underline{\bar{w}}_i|^2 \quad e \quad v_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \sqrt{-u_i} \geq d_0 \\ 1 - \frac{\sqrt{-u_i}}{d_0} & \text{se } \sqrt{-u_i} \leq d_0 \end{cases}$$

$$\vec{y} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i \vec{w}_i}{\sum_{i=1}^m v_i}$$

Descreva e interprete y em função da distância d_i da entrada $\underline{x}$ a cada padrão $\underline{w}_i$, $d_i = |\underline{x} - \underline{w}_i|$.