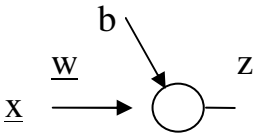
Redes de Base Radial - RBF - Radial Basis Function

1 - Introdução

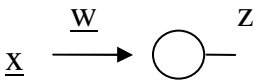
Neurônios tipo tgh(u)



$$u = \underline{w}^t \underline{x} + b$$

$$z = tgh(u)$$

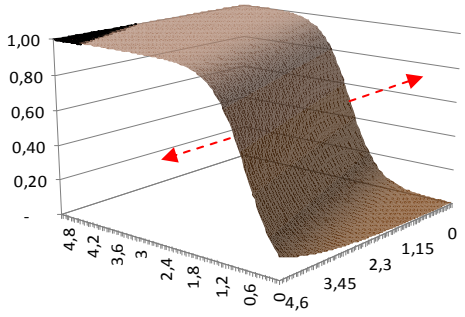
Neurônios de Base Radial



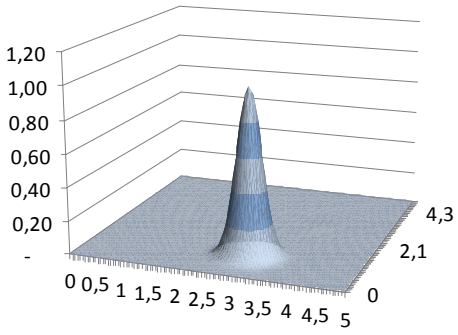
$$u = \left| \underline{x} - \underline{w} \right|^2$$

$$z = e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}$$

Neurônios tipo tgh(u)



Neurônios de Base Radial

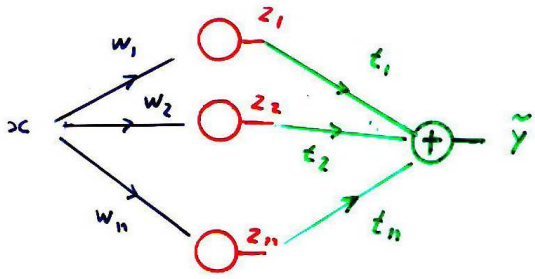


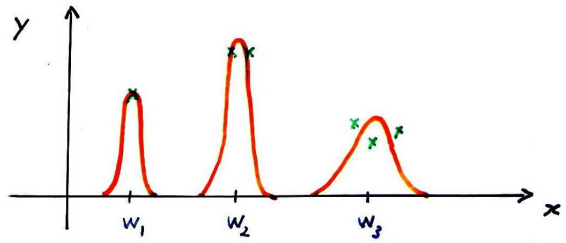
atuação ampla, global

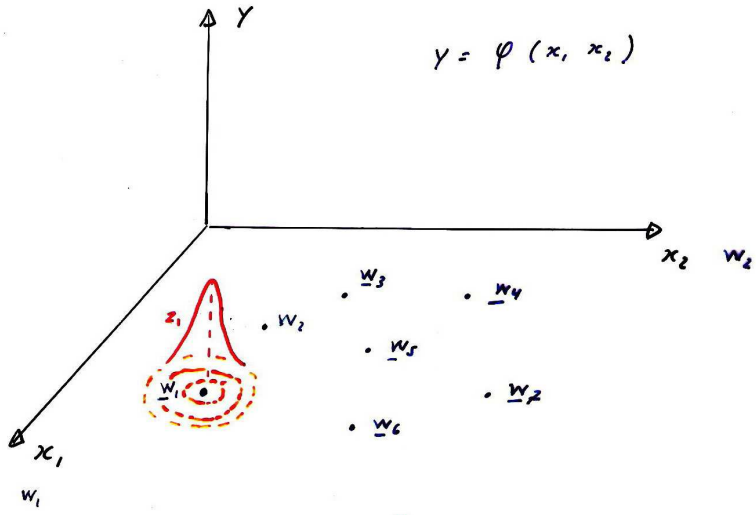
atuação local

2 - Rede de Base Radial como Aproximador

atuação local

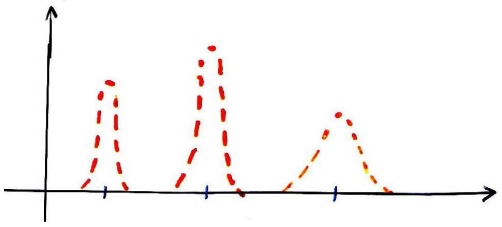


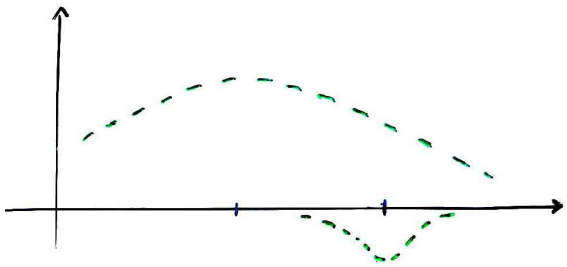


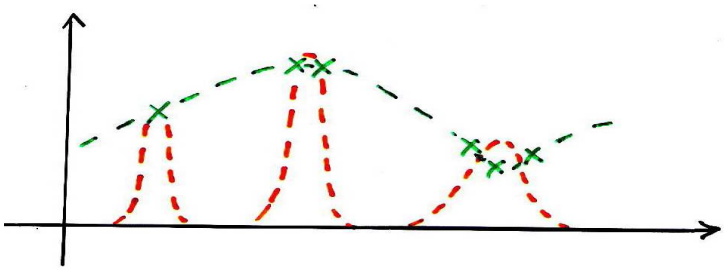


Composição da saída

local / global





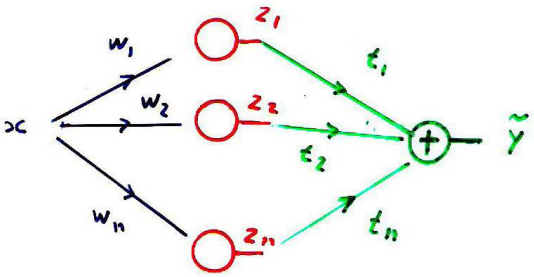


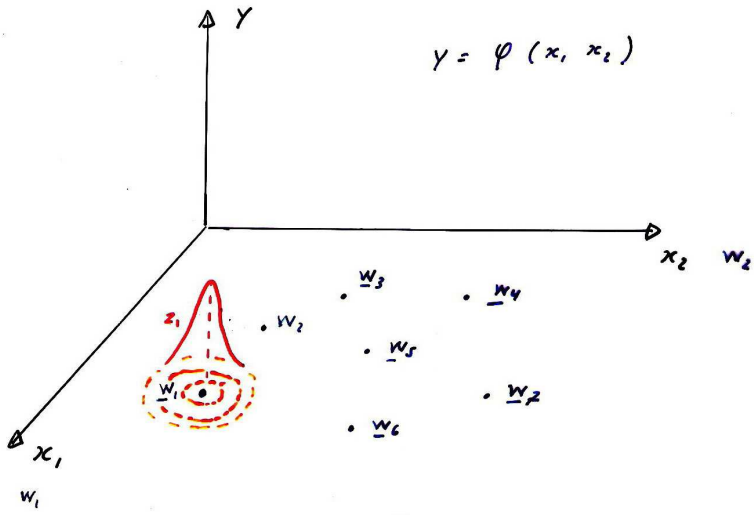
Função de base radial

$$f_i(\underline{w}_i, \underline{x}) \in [0,1] \approx \begin{cases} 1 & para \quad \underline{x} \approx \underline{w}_i \\ 0 & para \quad \underline{x} \neq \underline{w}_i \end{cases}$$

Rede de base radial

$$\tilde{y}(\underline{x}) \approx \begin{cases} t_i & para \quad \underline{x} \approx \underline{w}_i \\ 0 & para \quad \underline{x} \neq \underline{w}_i \end{cases}$$





Tipos de funções de base radial

$$d = |\underline{x} - \underline{w}|$$

gaussiana $$z = e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}}$$

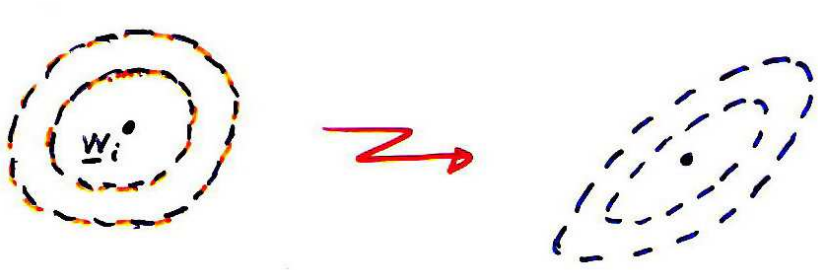
modal $$z = e^{-\frac{d}{\sigma}}$$

hiperbólica $$z = \frac{1}{1 + \frac{d}{\sigma}}$$

etc...

Generalização da medida da distância

Curvas de nível – Lugar geométrico tal que $z = e^{-u}$ é constante



$$u = (\underline{x} - \underline{w})^t \, \underline{K} \, (\underline{x} - \underline{w})$$

$\underline{K} = \frac{1}{2\sigma^2} \underline{I}$

K é a matriz identidade
LG é uma esfera centrada em w
Rede de base radial propriamente dita
1 parâmetro à ajustar (σ)

$\underline{K} = diag[k_{ii}]$

K é uma matriz diagonal
LG é um elipsóide com eixos alinhados com os do sistema (uma esfera na distância de Mahalanobis)
* m parâmetros à ajustar

$\underline{K} = [k_{ij}]$

K é uma matriz triangular superior
LG é um elipsóide com eixos em quaisquer direções
* m(m+1)/2 parâmetros à ajustar !!!

* Obs: m = dim x

Usar

$$\underline{K} = \frac{1}{2\sigma^2}\underline{I}$$

K é a matriz identidade
LG é uma esfera centrada em w
1 parâmetro à ajustar (σ)

ou

$$\underline{K} = diag[k_{ii}]$$

K é uma matriz diagonal
LG é um elipsóide com eixos alinhados com os do sistema (uma esfera na distância de Mahalanobis)
* m parâmetros à ajustar

Considerar usar PCA (componentes principais) como pré-processamento,
tornando as componentes ortogonais (e as elipses paralelas aos eixos) e normalizando (ou não) os desvios padrão de cada componente para 1

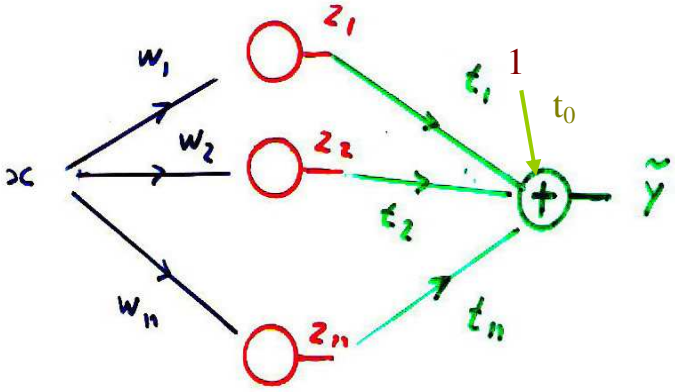
3 - Treinamento da RBF via backpropagation

Equações básicas da rede (signal feedforward)

$$\tilde{y} = \sum_{i=0}^{n} t_i z_i \qquad z_0 = 1$$

$$z_i = e^{-\frac{d_i^2}{2\sigma_i^2}}$$

$$d_i^2 = \sum_{j=1}^{m} (w_{ij} - x_j)^2$$

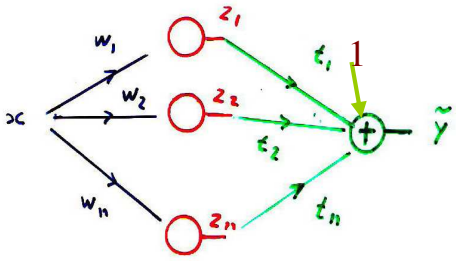


n - # neurônios na camada intermediária

m – dim x

Função objetivo a minimizar

$$F = \underset{\forall pares}{E}\ \varepsilon^2 \qquad \varepsilon = y - \tilde{y}$$



Acréscimo a aplicar no parâmetro p (genérico)

$$\Delta p = -\alpha \underset{\forall pares}{E} \frac{d\varepsilon^2}{dp}$$

usando a regra da cadeia nas equações básicas da rede

Equações básicas da rede

$$\tilde{y} = \sum_{i=0}^{n} t_i z_i \qquad z_i = e^{-\frac{d_i^2}{2\sigma_i^2}}$$

$$d_i^2 = \sum_{j=1}^{m} (w_{ij} - x_j)^2$$

$$\frac{d\varepsilon^2}{dt_i} = \frac{d\varepsilon^2}{d\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dt_i} = (-2\varepsilon)(z_i)$$

$$\frac{d\varepsilon^2}{d\sigma_i} = \frac{d\varepsilon^2}{d\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dz_i} \frac{dz_i}{d\sigma_i} = (-2\varepsilon)(t_i)\left(\frac{d_i^2 z_i}{\sigma_i^3}\right)$$

$$\frac{d\varepsilon^2}{dw_{ij}} = \frac{d\varepsilon^2}{d\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{dz_i} \frac{dz_i}{dd_i^2} \frac{dd_i^2}{dw_{ij}} = (-2\varepsilon)(t_i)\left(-\frac{z_i}{2\sigma_i^2}\right)[2(w_{ij} - x_j)]$$

Valores iniciais dos parâmetros:

vetores sinapse $\underline{w}$:

Melhor opção: clusterizar as entradas e escolher os centros dos clusters como valores iniciais dos vetores sinapse.

Mais simples: escolher as primeiras entradas que não estejam muito próximas entre si como valores iniciais para os vetores sinapse.

desvios σ_i:

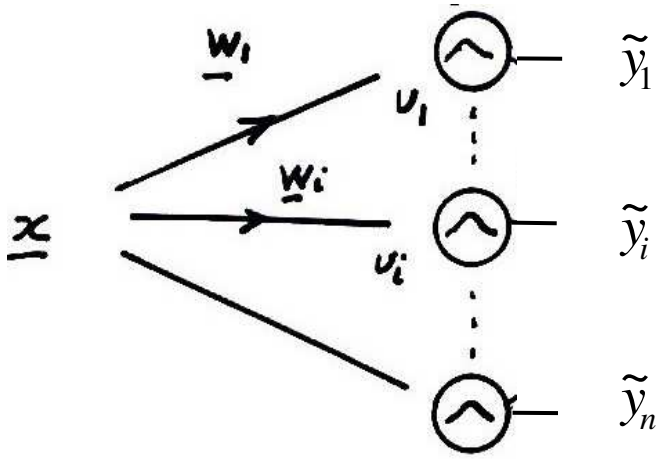
Se foi feita a clusterização escolher σ como ~ 25 % do diâmetro do cluster ou

Se não, escolher como ~ 50 % da distância média entre os centros iniciais escolhidos.

4 - **Rede de Base Radial como Classificador**

Redes com 1 camada

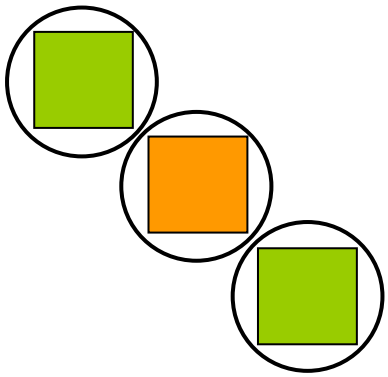
neurônios tipo RBF



Interpretação da saída da rede como variável lógica

$$y \in [0,1] \qquad \tilde{y} = e^{-u} \in (0,1]$$

$$\tilde{y}_{\log ico} = \begin{cases} 1 & se \quad \tilde{y} \geq 0.5 \\ 0 & se \quad \tilde{y} < 0.5 \end{cases}$$



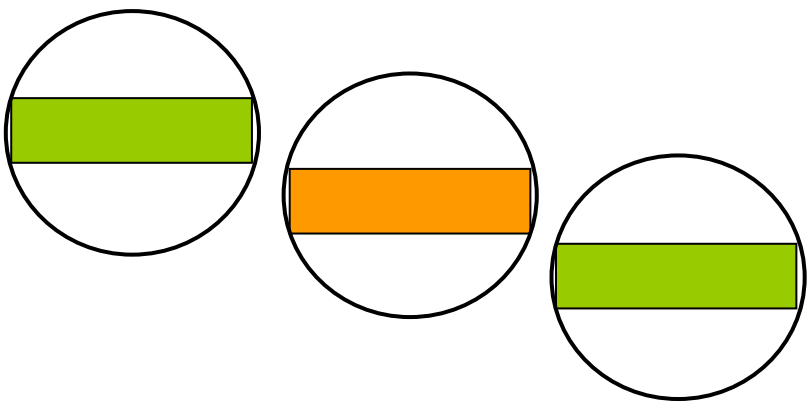
Separadores: esferas

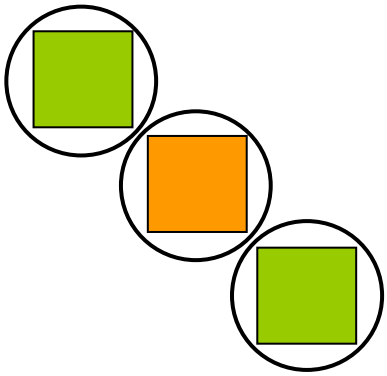
separa classes "esfericamente separáveis"

Treinamento: Backpropagation

Considerar usar PCA (componentes principais) como pré processamento,

normalizando os desvios padrão de cada componente para igualar o diâmetro de cada classe em todas as dimensões, facilitando torná-las "esfericamente separáveis".

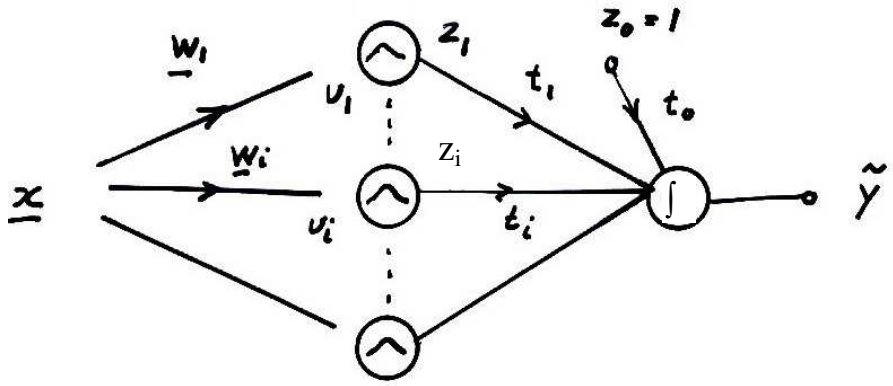




Redes com duas camadas:

Camada intermediária: neurônios RBF

Camada de saída: neurônios tgh(.) ou logísticos



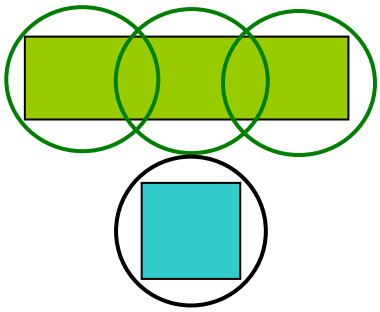
Interpretação da saída da rede (tgh) como variável lógica

$$y \in \{-1,+1\} \qquad \tilde{y} = tgh(u) \in (-1,+1)$$

$$\tilde{y}_{\log ico} = sign(\tilde{y}) = \begin{cases} +1 & se \quad \tilde{y} \geq 0 \\ -1 & se \quad \tilde{y} < 0 \end{cases}$$

Separadores: composição de esferas

é um classificador universal



Treinamento: Backpropagation

4.1 - Capacidade de mapeamento das redes RBF:

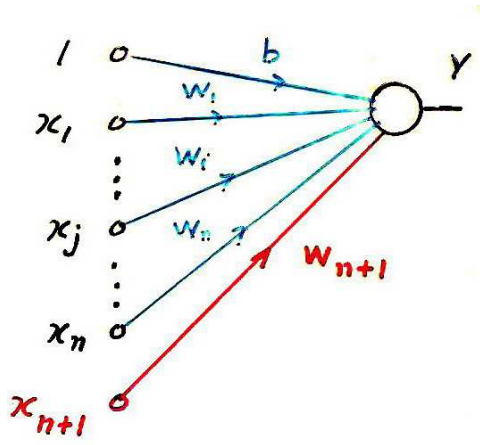
Existem teoremas análogos aos das redes com neurônios tipo tgh(.) para redes com neurônios tipo RBF na primeira camada e com neurônios lineares ou tipo tgh(.) na segunda camada, atuando respectivamente como aproximadores ou classificadores. Estes teoremas estabelecem que estas redes também são aproximadores universais.

5 - Rede alternativa à RBF

Perceptrons com entrada aumentada

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

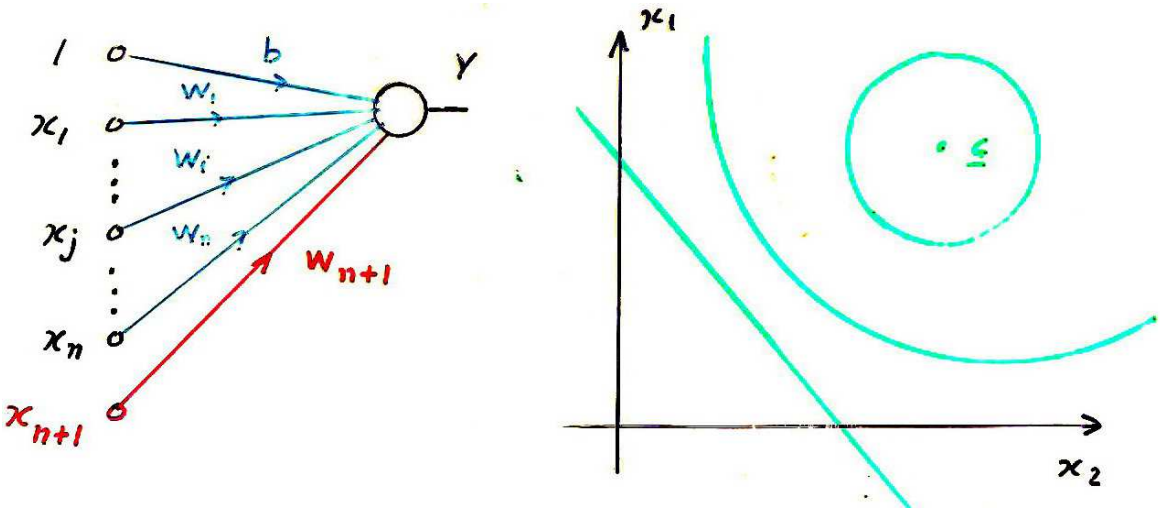
$$u = w_{n+1} x_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} w_j x_j + b$$



LG para u = k = constante

Esfera com centro com coordenadas $c_i = -\frac{w_i}{2w_{n+1}}$

e raio $r = \frac{1}{2w_{n+1}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i^2 + w_{n+1}(k-b) \right\}^{1/2}$



Obs:

1 - caso $w_{n+1} = 0$ a esfera degenera em um plano.

2 – caso $|\underline{x}| = 1$ para todo $\underline{x}$ (entradas com módulo normalizado) a entrada $\underline{x}_{n+1}$ é desnecessária. Como neste caso as entradas estão sobre uma hiper esfera de raio unitário, a intersecção do hiperplano separador com esta hiperesfera é outra hiperesfera. A normalização do módulo de $\underline{x}$ preservando a informação nele contida pode ser feita pela substituição de $\underline{x}$ por $\underline{x}'$, que tem uma componente a mais que $\underline{x}$.

$$x_i \longrightarrow x_i' = \frac{x_i}{M} \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{n+1}' = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i'^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

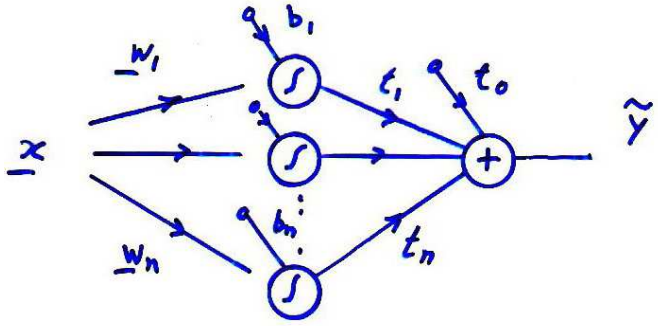
onde $M = cons\tan te \geq \max\left|\underline{x}\right|^2$

Rede com perceptrons aumentados com 2 camadas

Rede como aproximador

Camada intermediária – neurônios tgh com entradas aumentadas

Camada de saída – neurônio linear

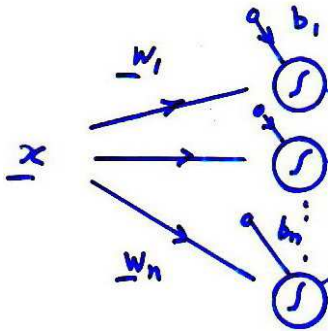


Rede como classificador

1 camada

- neurônios tgh com entradas aumentadas

– separadores esféricos

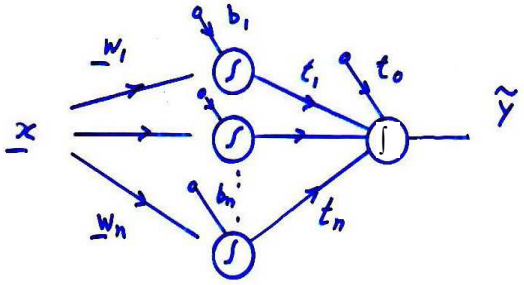


2 camadas – composição de esferas

- neurônios da camada intermediária tgh com entradas aumentadas

- neurônio da camada de saída tgh convencionais

- separador: composição de esferas



Treinamento:

Backpropagation convencional

Valores iniciais

Camada intermediária – similar aos da RBF

Camada de saída – aleatórios,
similar a rede com neurônios tgh convencionais.