4 - Dimensionando a rede

Quantas camadas de neurônios ?

Quantos neurônios por camada ?

Que tipo de neurônios ?

Subdimensionada >>> não tem capacidade de representar o mapeamento x >> y

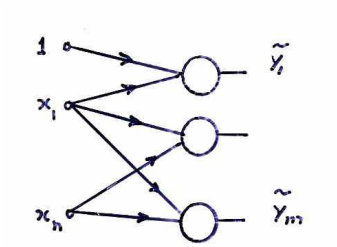
não “aprende”, o erro permanece elevado

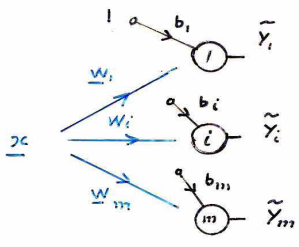
Superdimensionada >>> lenta no treino e na operação

não generaliza bem, tendência a overtraining

4.1 Capacidade de Mapeamento das redes - Saídas contínuas

Redes de uma camada (de neurônios)





Cada saída pode ser processada (treinada e operada) independentemente das demais

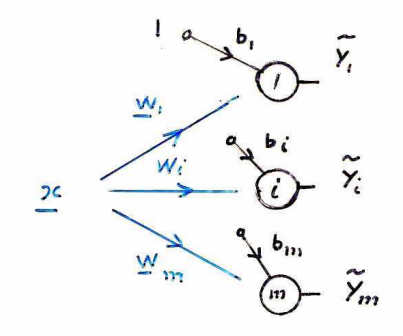
Se os neurônios são lineares, a rede é um mero **combinador linear:**

$$y_i = \sum_j x_j w_{ij} + b_i$$

e portanto tem **capacidade de mapeamento muito limitada**.

Se os neurônios são tipo tgh(.), a saída é um combinador linear com saída limitada:

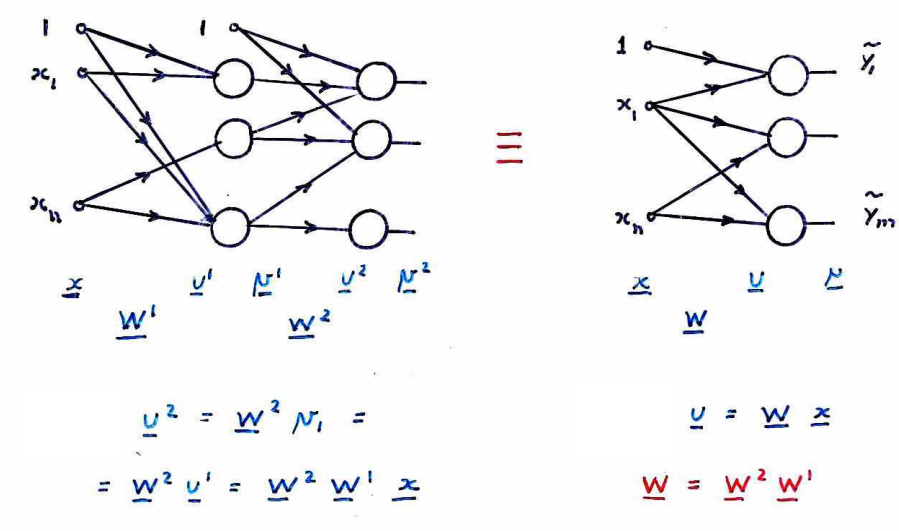
$$u_i = \sum_j x_j w_{ij} + b_i \qquad y_i = tgh\ u_i$$



embora limitada, esta estrutura encontrará aplicação em classificadores (separadores) lineares,
conforme será visto posteriormente.

Redes com duas camadas

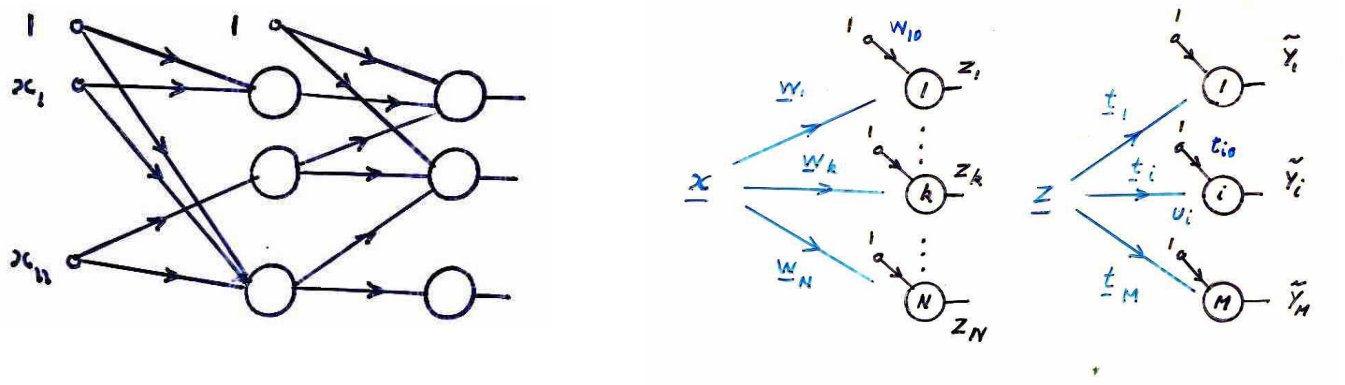
Com neurônios lineares na camada intermediária



Idêntica a uma rede com apenas uma camada !

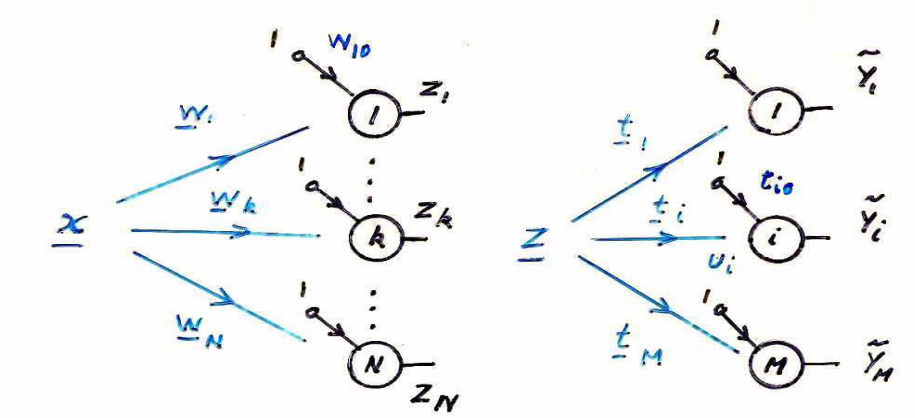
Redes com duas camadas

Com neurônios tipo tgh(.) na camada intermediária



$$\underline{x} \rightarrow \underline{z} \rightarrow \underline{y}$$

$\underline{x} \rightarrow \underline{z} \rightarrow \underline{y}$



$$z_k = tgh\left(\vec{x}^{\,t}\vec{w}_k + w_{k0}\right)$$

$$u_i = \vec{z}^{\,t}\vec{t} + t_{i0}$$

$$u_i = t_{i0} + \sum_k t_{ik}\, tgh\left(\vec{x}^{\,t}\vec{w}_k + w_{k0}\right)$$

Neurônio de saída linear:

$$y_i = t_{i0} + \sum_k t_{ik}\, tgh\left(\vec{x}^t \vec{w}_k + w_{k0}\right)$$

série de tgh(.)

Neurônio de saída tipo tgh(.)

$$y_i = tgh\left[t_{i0} + \sum_k t_{ik}\, tgh\left(\vec{x}^t \vec{w}_k + w_{k0}\right)\right]$$

série de tgh(.) com saída limitada. Será usada em classificadores.

Teorema (sem prova):

Se uma função f(.) é L^2 em um domínio então uma série de tgh (.) é um aproximador universal para a função no domínio.

Obs: Uma função f(.) é dita L^2 em um domínio se neste domínio $\int |f(.)|^2 d.$ existe. Funções que admitem representação por série de Fourrier são L^2.

Conclusão: uma rede neural com duas camadas, a primeira com neurônios do tipo tgh(.) e a segunda com neurônios lineares, é um aproximador universal para todas as funções de interesse prático em engenharia [1].

Ponto fraco: O número de neurônios na camada intermediária não pode ser pré-determinado [2] !

1 - Teorema de Kolmogorov (e.g. Beale, R., Jackson, T. & Jackson, T. (1990), Neural Computing: an introduction, Hilger.)

2 - Han, J., Kamber, M. & Pei, J. (2011), Data mining: concepts and techniques, Morgan Kaufmann Pub.

4.2 - Capacidade de Mapeamento das redes - Saídas lógicas { -1, 1 }

Classificadores

Será detalhada no futuro, no ítem classificadores.

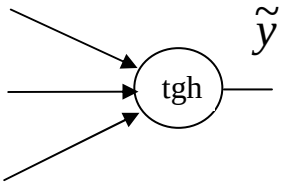
Antecipações necessárias:

Valores alvo:

$$y_i \in \{-1,+1\}$$

Neuronio de saída tipo tgh

$$\tilde{y} = tgh(u) \in (-1,+1)$$



Interpretação lógica da saída

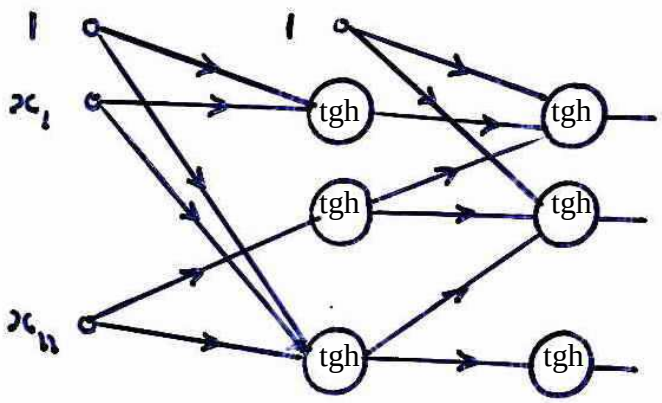
$$\tilde{y}_{\log ico} = sign(\tilde{y})$$

Treinamento BP: idêntico ao caso com saída contínua,

$\varepsilon_i = y_i - \tilde{y}_i$

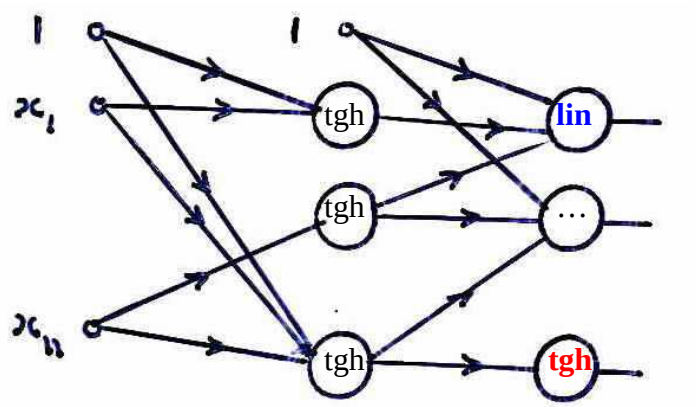
Teorema: Uma rede com duas camadas de neurônios tipo tgh(.) realiza qualquer função lógica com alvos {-1,+1} e o treinamento backpropagation minimiza o erro de classificação.

Ponto fraco: O número de neurônios na camada intermediária é difícil de ser pré-determinado !



4.2.1 - Capacidade de Mapeamento das redes - Saídas contínuas e lógicas na mesma rede

Teorema: Uma rede neural com duas camadas, (a) uma camada intermediária com neurônios tipo tgh(.) e (b) uma camada de saída com neuronios lineares para as saídas contínuas e neuronios tipo tgh para saídas lógicas treinada por backpropagation realiza qualquer mapeamento L^2 .



4.3 - Como dimensionar a rede ?

Usar **uma ou duas** camadas de neurônios

Na camada de saída:

se y contínuo, $y \in (-1,+1)$ >>> neurônio linear, tipo y = u

se y binário, $y \in \{-1,+1\}$ >>> neurônio não linear tipo y = tgh (u)

Na camada intermediária:

neurônios não lineares tipo y = tgh (u)

Mas como dimensionar ??

Como dimensionar a rede ?

$$\vec{x} \in R^n \Rightarrow \vec{y} \in R^m$$

complexidade do mapeamento ?

Tentativa e Erro !

Rede com uma camada:

$F_0 < F_{0max}$ satisfeita ? Sim: Fim

Não: Use uma rede com duas camadas.

Rede com duas camadas

neurônios na camada intermediária, m_1

$n > m_1 > m$ (heurística)

$F_0 < F_{0max}$ satisfeita ? Sim: Fim (ou reduzir m_1)

Não: aumentar m_1.

E redes com 3 ou mais camadas ?

Em princípio (ao menos teóricamente) não são necessárias.

O dimensionamento é mais difícil.

O tempo de treinamento cresce exponencialmente
com o número de camadas,

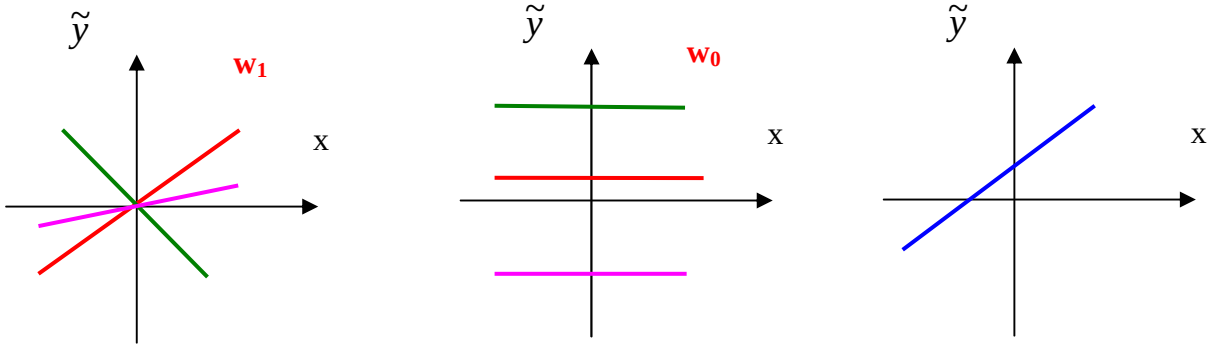
Mas existem casos (excessões) em que levam a
estruturas mais simples (e mais rápidas).

4.4 - Operação da Rede

Rede de 1 camada – combinador linear

$$\underline{\tilde{y}} = \varphi(\underline{x}) \qquad \tilde{y} = \varphi(x)$$

$$\tilde{y}_j = \sum_i w_{ji} x_i + w_{j0} \qquad \tilde{y} = w_1 x + w_0$$ **reta**



Duas entradas $y = w_2x_2 + w_1x_1 + w_0$ **plano**

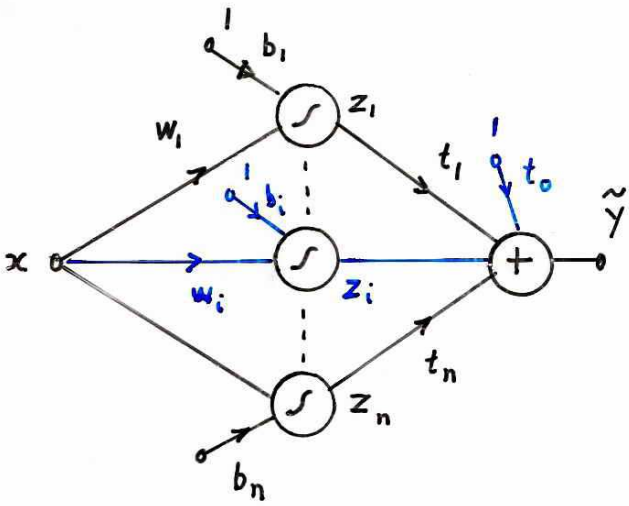
Rede com duas camadas

$\underline{\tilde{y}} = \varphi(\underline{x})$ $\tilde{y} = \varphi(x)$

$y = \varphi(x)$

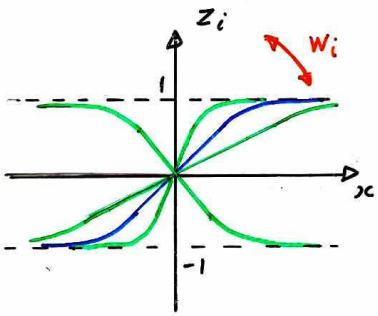
$z_i = t_0 h(w_i x + b_i)$

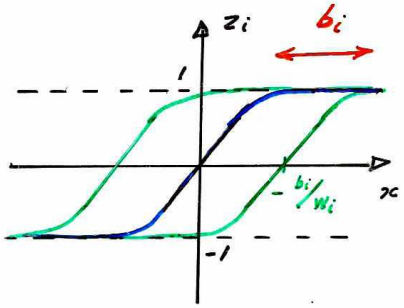
$\tilde{y} = t_0 + \sum t_i z_i$

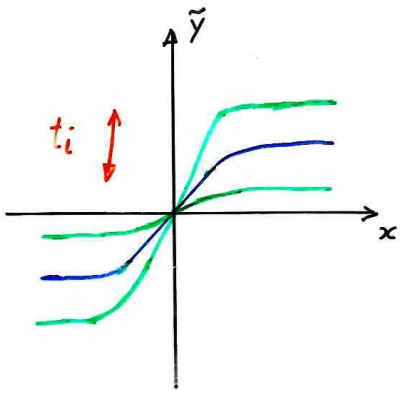


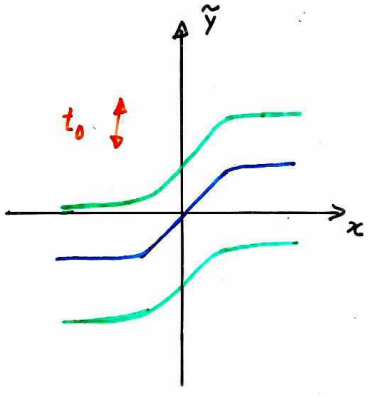
$\tilde{y} = t_0 + \sum t_i \; t_0 h(w_i x + b_i)$

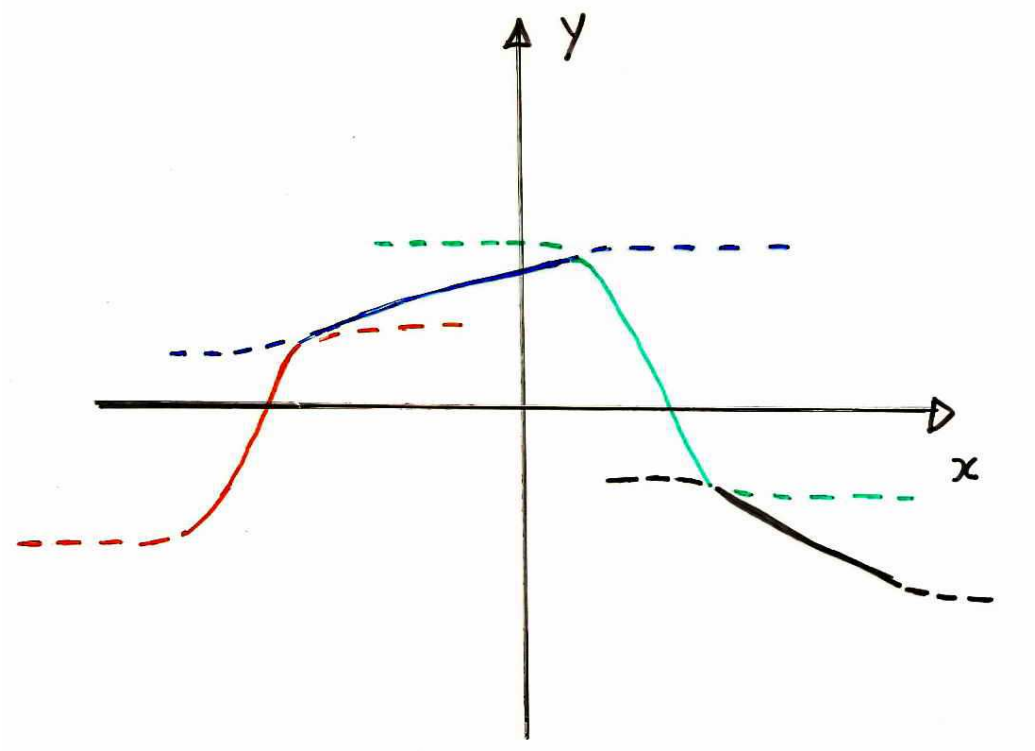
$\tilde{y} = t_0 + \sum t_i \; t_0 h(w_i x + b_i)$





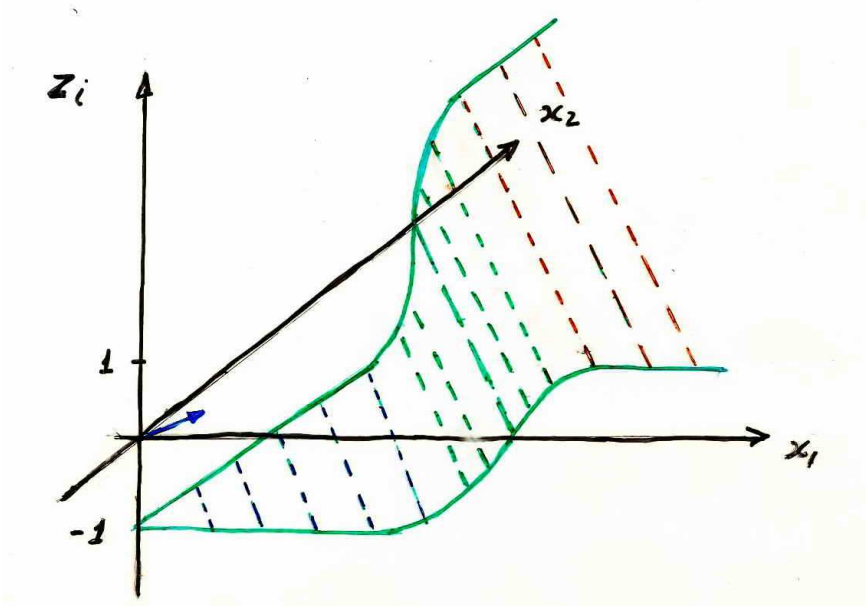






aproximação por segmentos de retas

Duas entradas $z_i = f(x_1, x_2)$

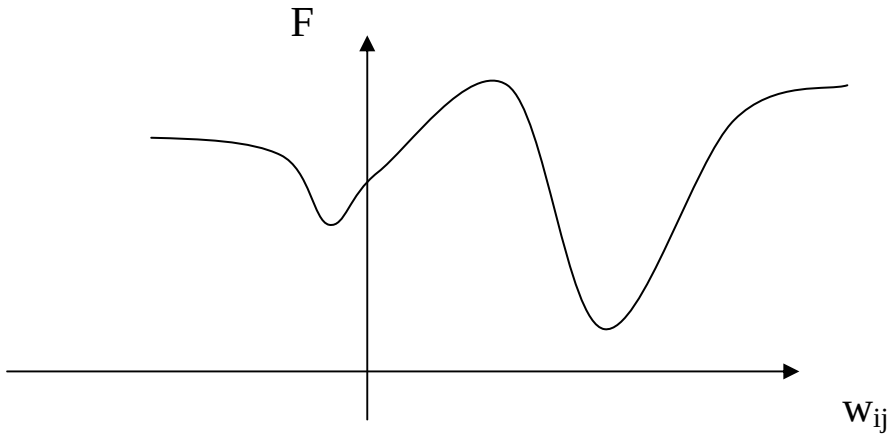


aproximação por segmentos de planos (hiperplanos)

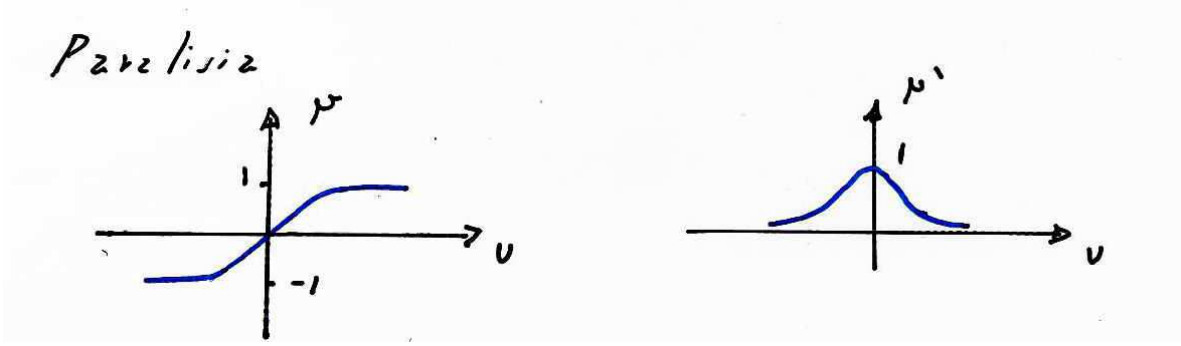
4.5 - Valores iniciais das sinapses

Duas características do processo de treinamento:

1 - Usualmente existem mínimos locais, e o processo pode ficar preso neles. Solução simples: tentar diversos pontos de partida, escolhendo valores iniciais das sinapses dentro de uma faixa grande de valores.

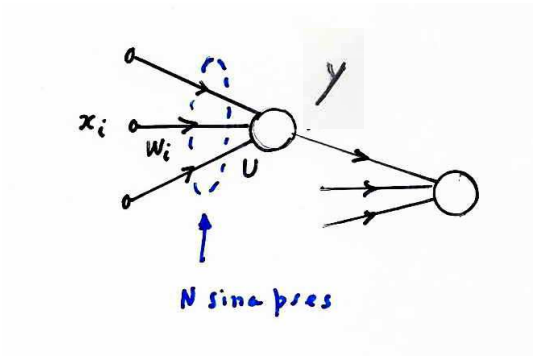


2 - O processo pode ficar paralizado. Como o erro retropropagado é multiplicado pela derivada da função de ativação no ponto de operação, valores muito elevados da excitação interna u podem levar a derivadas com valores muito pequenos e praticamente paralizar o processo. Valores grandes de u ocorrem se tivermos valores grandes das sinapses.



$v = tgh\,u \qquad v \in (-1,+1)$ $\qquad \frac{dv}{du} = 1 - v^2 \qquad \frac{dv}{du} \in (0,+1]$

Os dois critérios são antagônicos: devemos escolher valores iniciais grandes para as sinapses para escapar de mínimos locais, e pequenos para não paralisar o treinamento desde o início. Que valores escolher ?



$$y = tgh\,u \qquad \frac{dy}{du} = 1 - y^2 \qquad \frac{dy}{du} \in (0,1)$$

$$para \quad \left|\frac{dy}{du}\right| > .01 \qquad |u| < 3$$

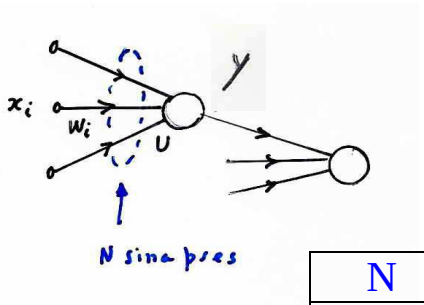
$$u = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \qquad \begin{cases} \mu_u = N\mu_w\mu_x \\ \sigma_u^2 = N\sigma_w^2\sigma_x^2 \end{cases}$$

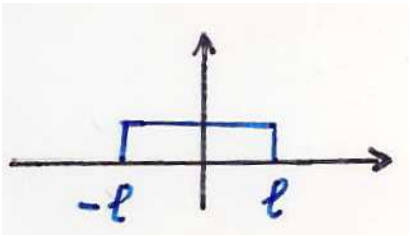
Para 99,97 % probabilidade da rede não iniciar paralisada

$$3\sigma_u = 3\sqrt{N}\sigma_w\sigma_x < |u|_{\max} = 3$$

como $\sigma_x = 1$, $\sigma_w \le \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Para uma distribuição uniforme de w, $l \le \sqrt{\frac{3}{N}}$





N	σ_w	l
4	.5	.9
10	.3	.5
100	.1	.2

Valores típicos: sorteio randômico entre – 0,2 e + 0,2. Se houver desconfiança de mínimos locais no entorno da origem aumentar a faixa.

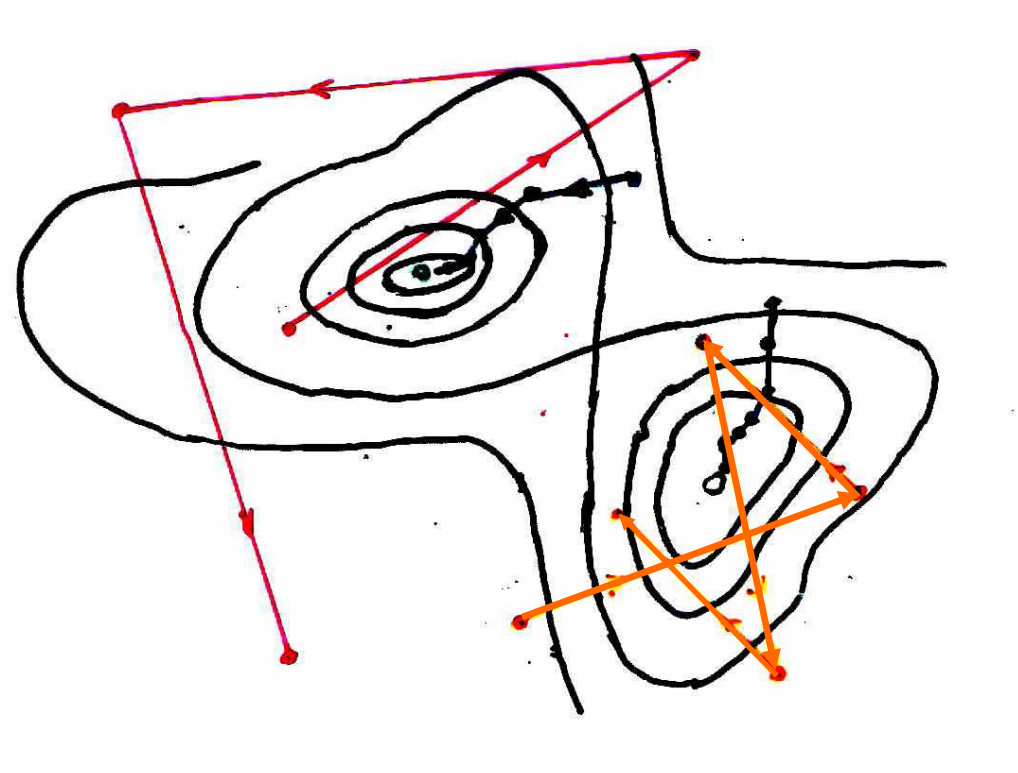
4.6 Escolha de α

"a escolha de α é uma arte" - Bernard Widrow

α deve ser tal que a aproximação da função (1ª ou 2ª ordem) em que o método se baseia é válida

α muito pequeno	convergência estável, processo muito lento
α muito grande	processo oscila ou mesmo diverge
α típico BP	.1, .05
α variável	BP resiliente (1ª ordem)
	otimização em linha (2ª ordem)

Efeito do Passo de Treinamento α



Efeito do Passo de Treinamento α - um exemplo simples

$$F(w) = w^2 \qquad \nabla F(w) = \frac{dF}{dw} = 2w$$

$$\Delta w = -\alpha \nabla F(w) = -2\alpha w$$

$$\alpha_{ótimo} \quad | \quad \nabla F(w + \Delta w) = 0$$

$$\nabla F(w + \Delta w) = 2(w + \Delta w) = 2(w - 2\alpha w)$$

$$\alpha_{ótimo} = .5$$

$$\textit{Divergência}: \qquad |\nabla F(w + \Delta w)| > |\nabla F(w)|$$

$$[2(w - 2\alpha w)]^2 > [2w]^2 \qquad \alpha_{divergente} > 1$$