5 - Dimensionando a rede

Quantas camadas de neurônios ?

Quantos neurônios por camada ?

Que tipo de neurônios ?

Subdimensionada >>> não tem capacidade de representar o mapeamento x >> y

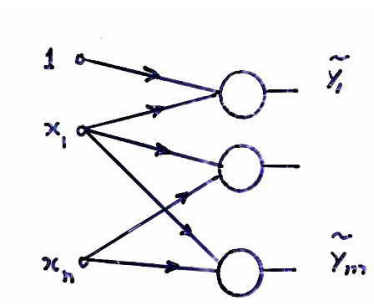
não “aprende”, o erro permanece elevado

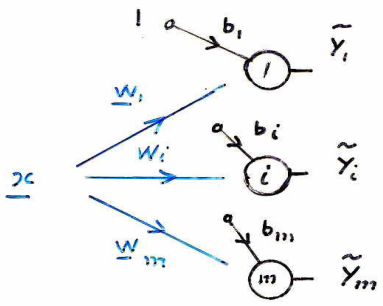
Superdimensionada >>> lenta no treino e na operação

não generaliza bem, tendência a overtraining

5.1 Capacidade de Mapeamento das redes

Redes de uma camada (de neurônios)





Cada saída pode ser processada (treinada e operada) independentemente das demais

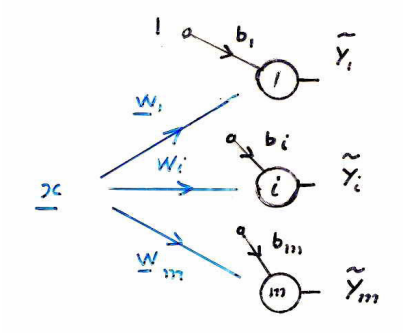
Se os neurônios são lineares, a rede é um **mero combinador linear:**

$$y_i = \sum_j x_j w_{ij} + b_i$$

e portanto tem **capacidade de mapeamento muito limitada**.

Se os neurônios são tipo tgh(.), a saída é um combinador linear com saída limitada:

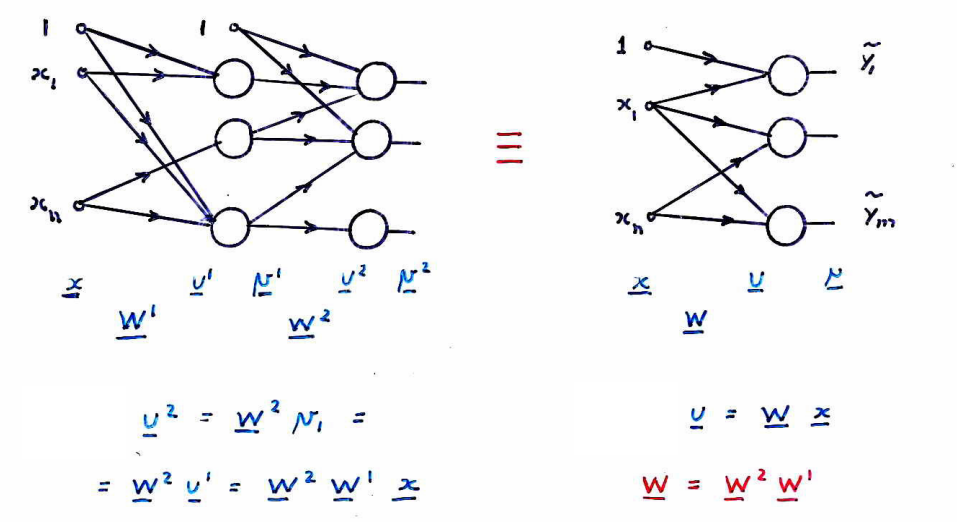
$$u_i = \sum_j x_j w_{ij} + b_i \qquad y_i = tgh\ u_i$$



embora limitada, esta estrutura encontrará aplicação em classificadores (separadores) lineares, conforme será visto posteriormente.

Redes com duas camadas

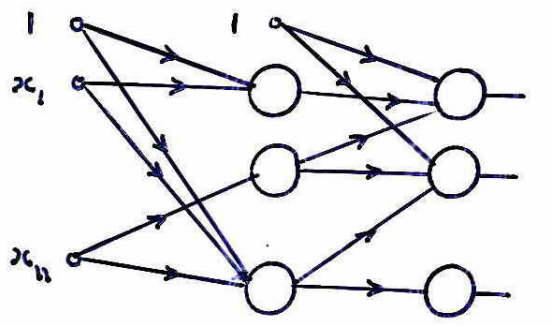
Com neurônios lineares na camada intermediária

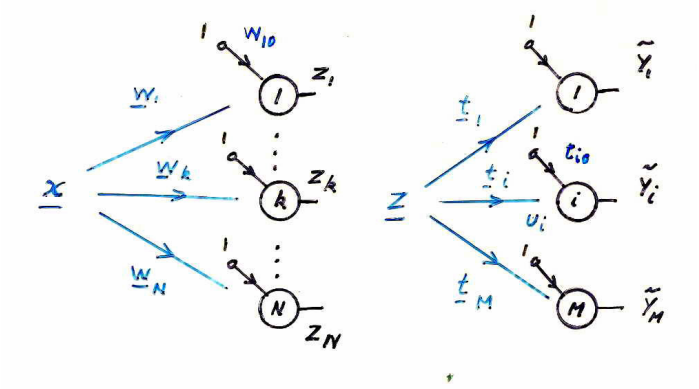


Idêntica a uma rede com apenas uma camada !

Redes com duas camadas

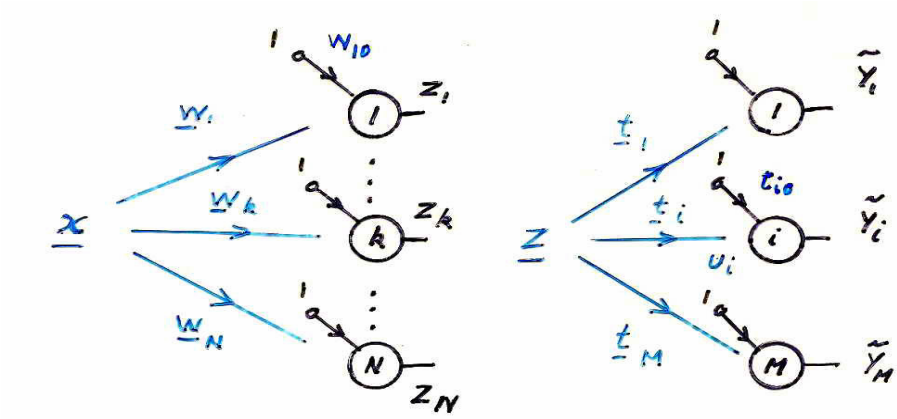
Com neurônios tipo tgh(.) na camada intermediária





$$\underline{x} \rightarrow \underline{z} \rightarrow \underline{y}$$

$\underline{x} \rightarrow \underline{z} \rightarrow \underline{y}$



$$z_k = tgh\left(\vec{x}^{\,t}\vec{w}_k + w_{k0}\right)$$

$$u_i = \vec{z}^{\,t}\vec{t} + t_{i0}$$

$$u_i = t_{i0} + \sum_k t_{ik}\, tgh\left(\vec{x}^{\,t}\vec{w}_k + w_{k0}\right)$$

Neurônio de saída linear:

$$y_i = t_{i0} + \sum_k t_{ik}\, tgh\left(\vec{x}^t \vec{w}_k + w_{k0}\right)$$

série de tgh(.)

Neurônio de saída tipo tgh(.)

$$y_i = tgh\left[t_{i0} + \sum_k t_{ik}\, tgh\left(\vec{x}^t \vec{w}_k + w_{k0}\right)\right]$$

série de tgh(.) com saída limitada.

Teorema (sem prova):

Se uma função f(.) é L^2 em um domínio então uma série de tgh (.) é um aproximador universal para a função no domínio.

Obs: Uma função f(.) é dita L^2 em um domínio se neste domínio $\int |f(.)|^2 d.$ existe.
Funções que admitem representação por série de Fourrier são L^2.

Conclusão: uma rede neural com duas camadas, a primeira com neurônios do tipo tgh(.) e a segunda com neurônios lineares, é um aproximador universal para todas as funções de interesse prático em engenharia.

Corolário (sem prova):

Uma rede neural com duas camadas de neurônios do tipo tgh(.) é capaz de realizar qualquer função lógica.

Obs 1: Na saída considera-se $\tilde{y}_{i\ \text{lógico}} = \text{sign}\ (\tilde{y}_{i\ \text{rede}})$

Obs 2: Um prova muito simples deste corolário é lembrar que qualquer função lógica pode ser realizada por um "ou" de mintermos ("e"s), isto é, em duas camadas. E que "e"s e "ou"s são realizáveis com neurônios.

Outras observações sobre os teoremas:

Obs1:

Existem teoremas análogos para redes com neurônios tipo RBF na primeira camada e com neurônios lineares ou tipo tgh(.) na segunda camada. Estas redes também são aproximadores universais.

Obs 2:

Ponto fraco: O número de neurônios na camada intermediária não pode ser pre-determinado !

5.2 - Como dimensionar a rede ?

Usar **uma ou duas** camadas de neurônios

Na camada de saída:

se y contínuo, $y \in (-1,+1)$ >>> neurônio linear, tipo y = u

se y binário, $y \in \{-1,+1\}$ >>> neurônio não linear tipo y = tgh (u)

Na camada intermediária:

neurônios não lineares tipo y = tgh (u)

Mas como dimensionar ??

Como dimensionar a rede ?

$$\vec{x} \in R^n \Rightarrow \vec{y} \in R^m$$

complexidade do mapeamento ?

Tentativa e Erro !

Rede com uma camada:

$F_0 < F_{0max}$ satisfeita ? Sim: Fim

Não: Use uma rede com duas camadas.

Rede com duas camadas

neurônios na camada intermediária, m_1

$n > m_1 > m$ (heurística)

$F_0 < F_{0max}$ satisfeita ? Sim: Fim (ou reduzir m_1)

Não: aumentar m_1.

E redes com 3 ou mais camadas ?

Em princípio (ao menos teóricamente) não são necessárias.

O dimensionamento é mais difícil.

O tempo de treinamento cresce exponencialmente com o número de camadas,

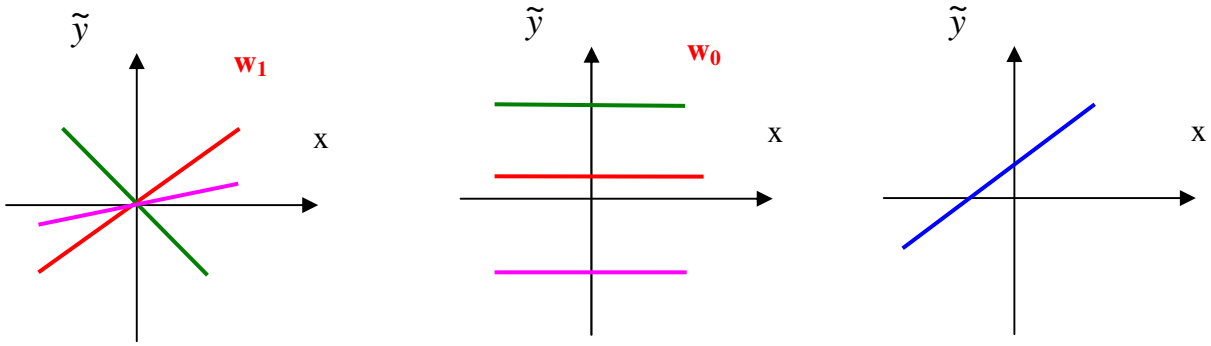
Mas existem casos (excessões) em que levam a estruturas mais simples (e mais rápidas).

5.3 - Operação da Rede

Rede de 1 camada – combinador linear

$$\underline{\tilde{y}} = \varphi(\underline{x}) \qquad \tilde{y} = \varphi(x)$$

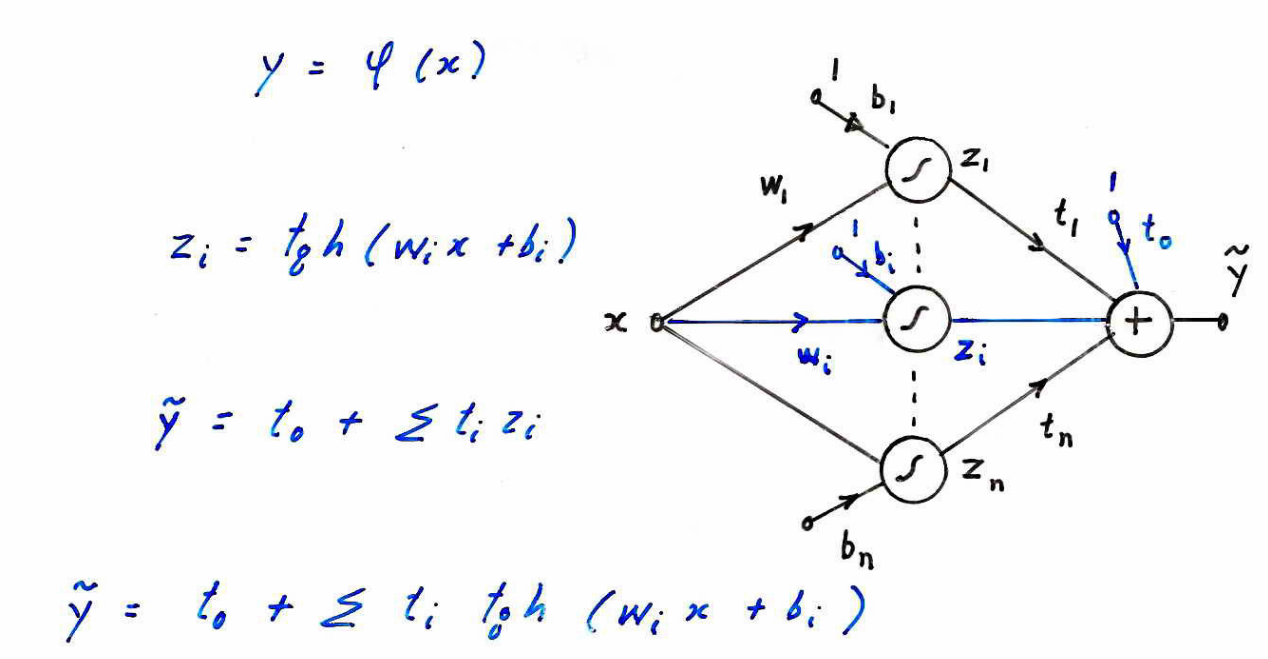
$$\tilde{y}_j = \sum_i w_{ji} x_i + w_{j0} \qquad \tilde{y} = w_1 x + w_0 \quad \textbf{reta}$$



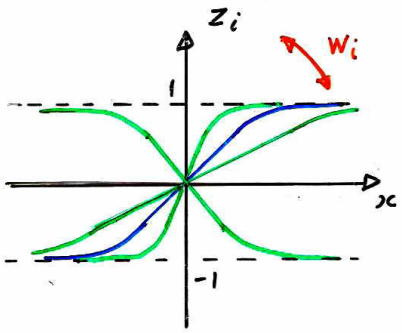
Duas entradas $y = w_2x_2 + w_1x_1 + w_0$ **plano**

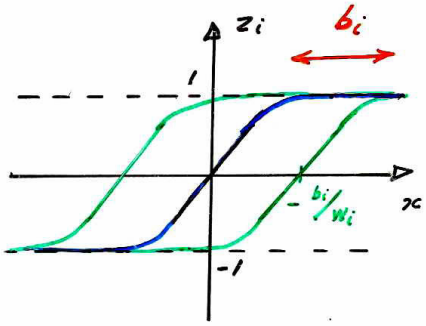
Rede com duas camadas

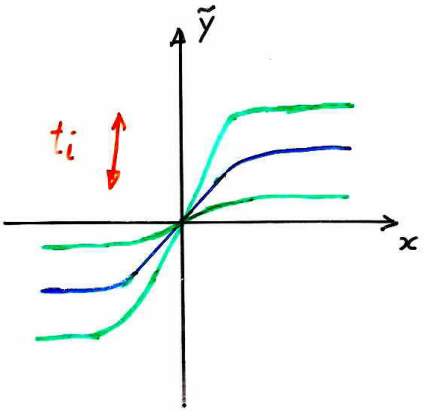
$$\underline{\tilde{y}} = \varphi(\underline{x}) \qquad \tilde{y} = \varphi(x)$$

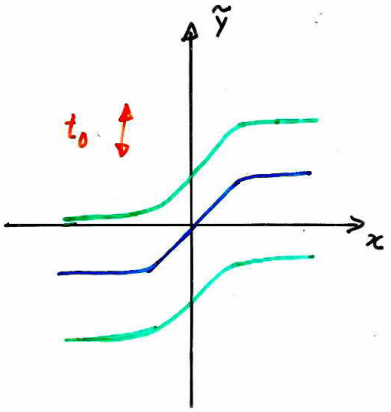


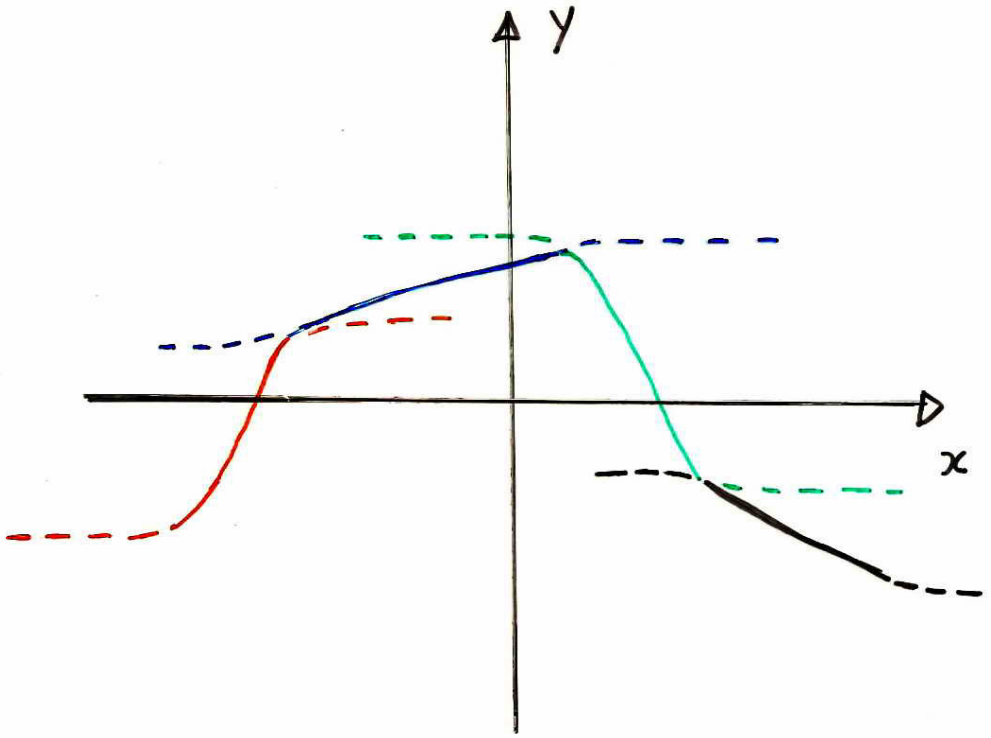
$$\tilde{y} = t_0 + \sum t_i \; t_0 h \; (w_i x + b_i)$$





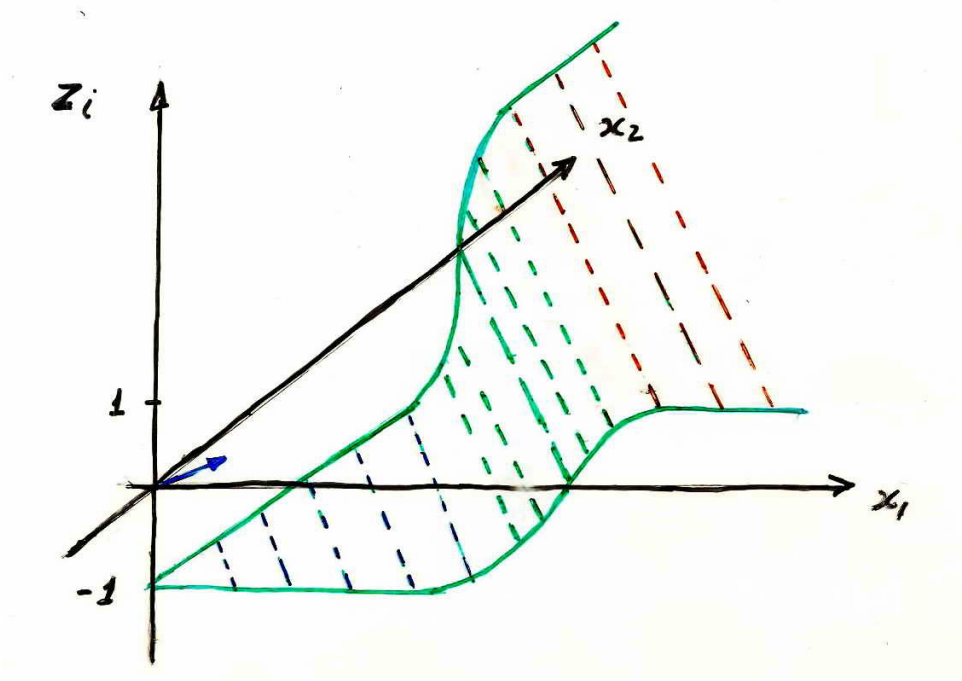






aproximação por segmentos de retas

Duas entradas $z_i = f(x_1, x_2)$

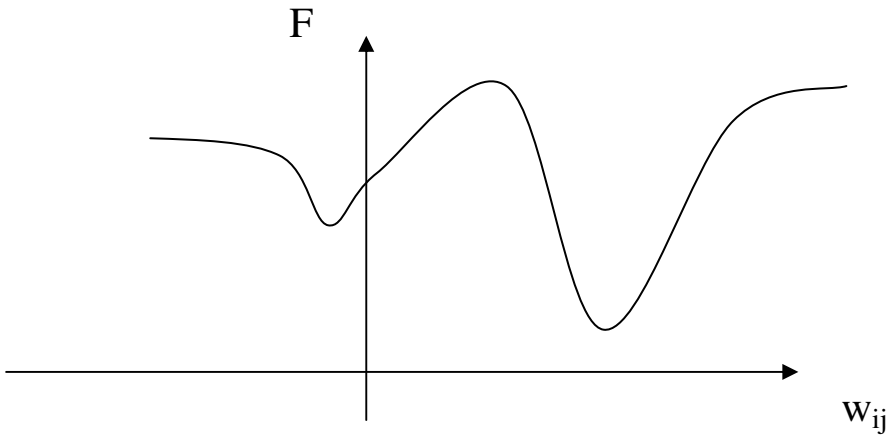


aproximação por segmentos de planos (hiperplanos)

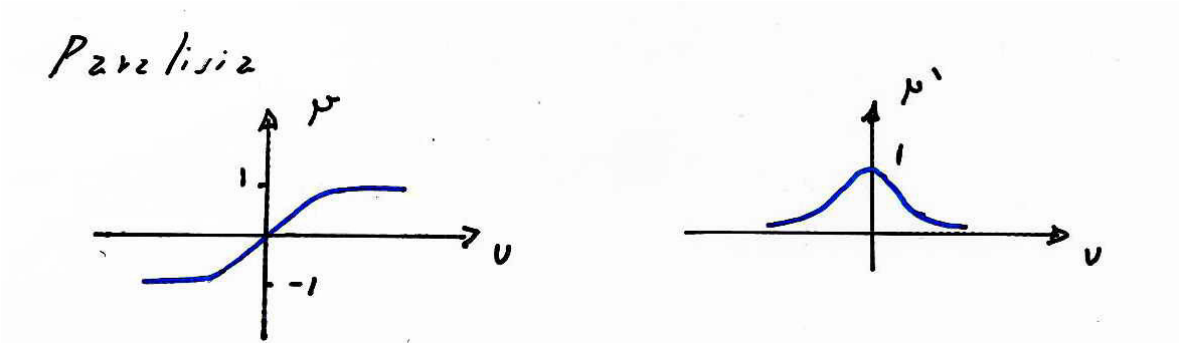
5.4 - Valores iniciais das sinapses

Duas características do processo de treinamento:

1 - Usualmente existem mínimos locais, e o processo pode ficar preso neles. Solução simples: tentar diversos pontos de partida, escolhendo valores iniciais das sinapses dentro de uma faixa grande de valores.

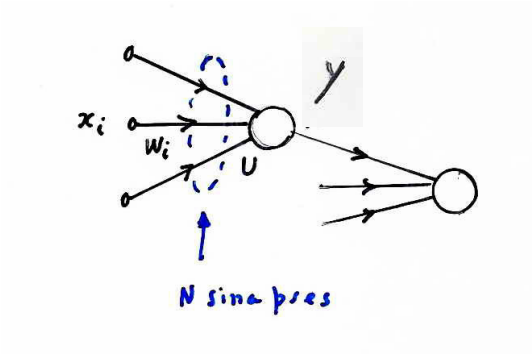


2 - O processo pode ficar paralizado. Como o erro retropropagado é multiplicado pela derivada da função de ativação no ponto de operação, valores muito elevados da excitação interna u podem levar a derivadas com valores muito pequenos e praticamente paralizar o processo. Valores grandes de u ocorrem se tivermos valores grandes das sinapses.



$$v = tgh\, u \qquad v \in (-1,+1) \qquad \frac{dv}{du} = 1 - v^2 \qquad \frac{dv}{du} \in (0,+1]$$

Os dois critérios são antagônicos: devemos escolher valores iniciais grandes para as sinapses para escapar de mínimos locais, e pequenos para não paralisar o treinamento desde o início. Que valores escolher ?



$$y = tgh\, u \qquad \frac{dy}{du} = 1 - y^2 \qquad \frac{dy}{du} \in (0,1)$$

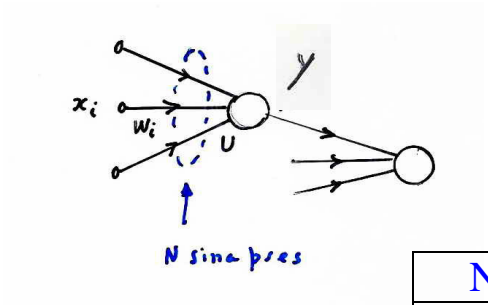
$$para \quad \left|\frac{dy}{du}\right| > .01 \qquad |u| < 3$$

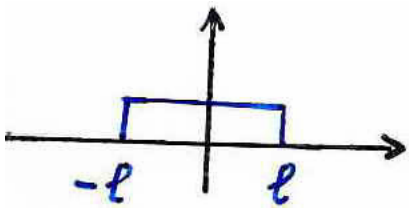
$$u = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \qquad \begin{cases} \mu_u = N\mu_w\mu_x \\ \sigma_u^2 = N\sigma_w^2\sigma_x^2 \end{cases}$$

Para 99,97 % probabilidade da rede não iniciar paralisada

$$3\sigma_u = 3\sqrt{N}\sigma_w\sigma_x < |u|_{\max} = 3$$

como $\sigma_x = 1$, $\sigma_w \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$. Para uma distribuição uniforme de w, $l \leq \sqrt{\frac{3}{N}}$





N	σ_w	l
4	.5	.9
10	.3	.5
100	.1	.2

Valores típicos: sorteio randômico entre – 0,2 e + 0,2. Se houver desconfiança de mínimos locais no entorno da origem aumentar a faixa.

5.5 Escolha de α

"a escolha de α é uma arte" - Bernard Widrow

α deve ser tal que a aproximação da função (1ª ou 2ª ordem) em que o método se baseia é válida

α muito pequeno	convergência estável, processo muito lento
α muito grande	processo oscila ou mesmo diverge
α típico BP	.1, .05
α variável	BP resiliente (1ª ordem)
	otimização em linha (2ª ordem)