

CPE 722 - 2ª série de exercícios - Similaridade

Prazo para entrega: quarta feira, 22/07

A resolução desta série será apresentada na aula de quinta feira, 23/07

1 - Considere um conjunto de classes C_i , $i = 1, 2, \dots$ com baricentros $\underline{w}_i$ e raio de similaridade r_0 .

1.a - Mostre que a equação do plano separador entre duas classes cujos centros são $\underline{w}_j$ e $\underline{w}_k$ pelo critério do padrão mais próximo (critério 1) é

$$2 \underline{x}^t (\underline{w}_j - \underline{w}_k) + |\underline{w}_k|^2 - |\underline{w}_j|^2 = 0$$

1.b - Mostre que a equação da esfera separadora pelo critério de similaridade mínima r_0 (critério 2) é

$$\underline{x}^t (\underline{x} - 2\underline{w}_k) + |\underline{w}_k|^2 - r_0^2 = 0$$

1.c - Mostre que o domínio da classe C_k com baricentro $\underline{w}_k$ e raio de similaridade r_0 pelos critérios de centro mais próximo (critério 1) e de similaridade mínima (critério 2) é definido por todo $\underline{x}$ que satisfaz simultaneamente as inequações

$$\begin{aligned} \underline{x}^t (\underline{x} - 2\underline{w}_k) &\leq r_0^2 - |\underline{w}_k|^2 \\ 2\underline{x}^t (\underline{w}_i - \underline{w}_k) &\leq |\underline{w}_i|^2 - |\underline{w}_k|^2 \quad \forall i \neq k \end{aligned}$$

2 - Considere um classificador em que todas as entradas $\underline{x}$ e todos os padrões de classe $\underline{w}_i$ tem módulo unitário. Para este caso:

2.a - mostre que $u_i = \underline{x}^t \underline{w}_i$ (como nos neurônios clássicos das redes feedforward) é uma medida de similaridade entre $\underline{x}$ e $\underline{w}_i$

2.b - Interprete a equação $u_i = f(d_i^2)$ onde $d_i = |\underline{x} - \underline{w}_i|$. Considere que todos os pontos $\underline{x}$ e $\underline{w}_i$ estão sobre uma hipersfera de raio unitário

2.c - mostre que a condição para que uma entrada $\underline{x}$ pertença à uma classe com centro em $\underline{w}$ e raio de similaridade r_0 é que $u_i = \underline{x}^t \underline{w}_i \geq 1 - \frac{r_0^2}{2}$

3 – Mostre que se todas as entradas $\underline{x}$ de uma classe tem módulo unitário usualmente o padrão da classe **não terá** módulo unitário, mas um pouco menor que 1. Mas mesmo assim, se o módulo dos padrões de classe $\underline{w}_i$ forem normalizados para 1, $u_i = \underline{x}^t \underline{w}_i$ ainda será aceitável como uma medida de similaridade (similaridade cosseno).

4 – Para a utilização de $u_i = \underline{x}^t \underline{w}_i$ como medida de similaridade é necessário que todas as entradas $\underline{x}$ e todos os padrões de classe $\underline{w}_i$ tenham módulo unitário. Mas a normalização das entradas perde a informação do módulo das mesmas, que pode ser importante para a classificação. Mostre que o problema pode ser resolvido classificando a entrada modificada $\underline{x}'$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \\ x'_{n+1} \end{bmatrix} \quad M \text{ arbitrário}, \quad M \geq \underset{\forall \underline{x}}{\text{Max}} |\underline{x}|$$

$$x'_i = \frac{x_i}{M} \quad i = 1, \dots, n \quad x'_{n+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}$$