

Classificação por Similaridade

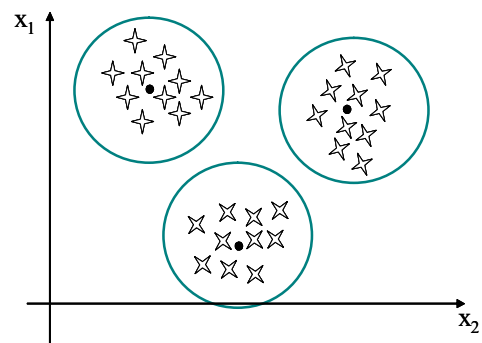
Crítérios: máxima similaridade + similaridade mínima

Domínio da classe: esfera centrada no padrão da classe

Por que os sinais de uma classe são apenas semelhantes, e não iguais ?

Ruído

$$\vec{x} \in C_j \quad \therefore \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j$$

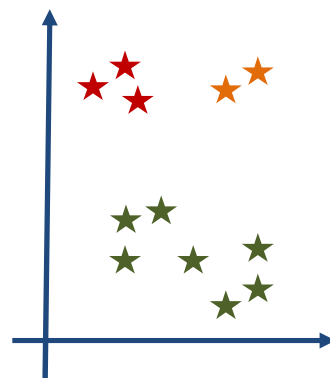


Ruído

Por que os sinais de uma classe são apenas semelhantes, e não iguais ?



Classificação por similaridade



Hipóteses:

1 - Os elementos $\underline{x}_i$ de uma classe C_j são constituídos pelo padrão $\underline{m}_i$ da classe, ao qual foi adicionado um ruído $\underline{r}_i$ característico da classe C_j .

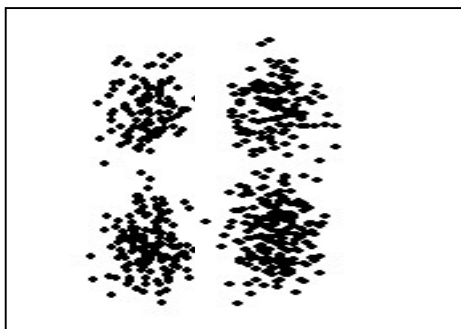
$$\vec{x} \in C_j \quad \therefore \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} r_{j1} \\ \dots \\ r_{jn} \end{bmatrix}$$



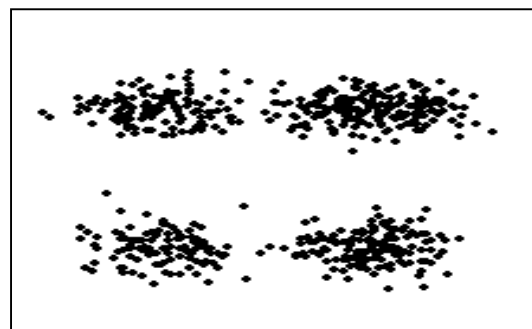
2 - O ruído r_{ji} de cada dimensão é estocástico com média zero e distribuição aproximadamente gaussiana.

3 - As características do ruído independem da classe (ou não).

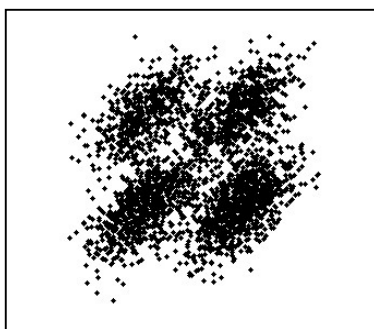
4 - Uma classe pode ser constituída por subclasses, às quais se aplicam as hipóteses acima (à utilizar no caso da hipótese 3 não ser atendida).



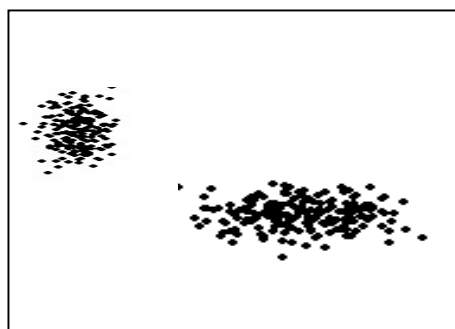
Ruído não correlato, $\sigma_1 \cong \sigma_2$



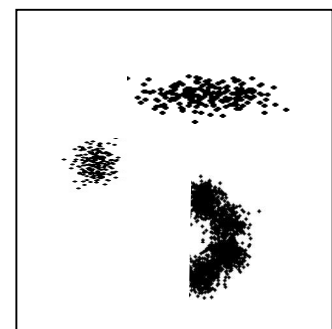
Ruído não correlato, $\sigma_1 \neq \sigma_2$



Ruído correlato, $x_1 = f(x_2)$



Hipótese 3 não atendida



Classes compostas

Caracterização do ruído

1 - Caso supervisionado

Pares entrada-saída $[\vec{x}, C(\vec{x})]$

As classes de cada entrada (elemento) $\underline{x}$ são conhecidas. Neste caso seu baricentro $\vec{m}_j$ também é conhecido

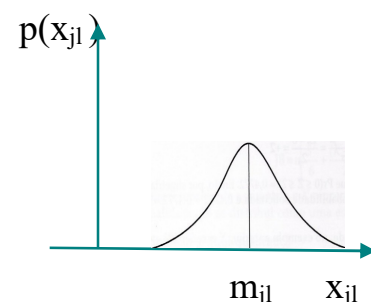
$$\vec{m}_j = E_{\forall \vec{x}_i \in C_j} \vec{x}_i = \frac{1}{n_j} \sum_{\forall \vec{x}_i \in C_j} \vec{x}_i$$

A caracterização do ruído de cada classe C_j , $\vec{r}_j$, em cada dimensão l , r_{jl} , pode ser realizada a partir da extração de $\vec{r}_j$ das entradas pertencentes à classe

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r}_j \quad \therefore \quad \vec{r}_j = \vec{x} - \vec{m}_j \quad e \quad r_{jl} = x_{jl} - m_{jl}$$

A análise do conjunto das variáveis r_{jl} permite conhecer sua distribuição, seu valor eficaz σ , sua correlação com o ruído nas demais dimensões $r_{jk} \mid k \neq l$ (se houver), etc.

Isto permitirá descorrelacionar os ruídos das diferentes dimensões, normalizar o valor eficaz por dimensão, etc., obtendo um conjunto de dados muito mais simples de classificar, como será visto mais tarde.



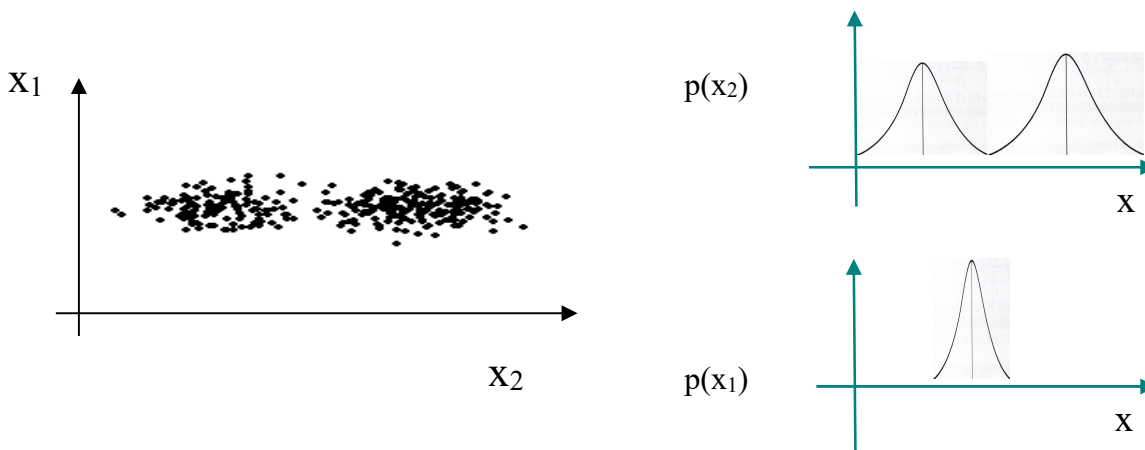
2 - Caso não supervisionado

As classes de cada entrada (elemento) x **não** são conhecidas

Se as classes apresentarem uma dispersão inter classes (distância) razoavelmente maior que intra classe (diâmetros) a análise de $p(x)$ em cada dimensão pode (eventualmente) indicar as características de cada classe em cada dimensão (centro, ruído, etc.).

Para uma classe
$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

Para N classes
$$p(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$



Tentativa e erro por clusterização experimental.

Outras técnicas

3 – Ruído Branco – o caso ideal

Os elementos $\underline{x}_i$ de uma classe C_j são constituídos pelo padrão $\underline{m}_i$ da classe, ao qual foi adicionado um ruído $\underline{r}$

$$\vec{x} \in C_j \quad \therefore \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{bmatrix}$$



As componentes do ruído r_j em cada dimensão j

- são estocásticas,
- tem média zero,
- tem distribuição gaussiana (ou aproximadamente gaussiana).
- tem a mesma variância,
- são não correlatas e
- independem da classe.

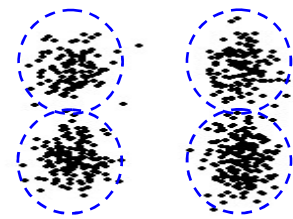


Obs 1: O tratamento de alguns casos mais genéricos (branqueamento do ruído) será visto posteriormente

Obs 2: Se necessário uma classe pode ser considerada como constituída por diversas subclasses, às quais se aplicam as hipóteses acima.



No caso de ruído branco o separador ideal para as classes são esferas, que são também o separador natural por similaridade dos processos não supervisionados.

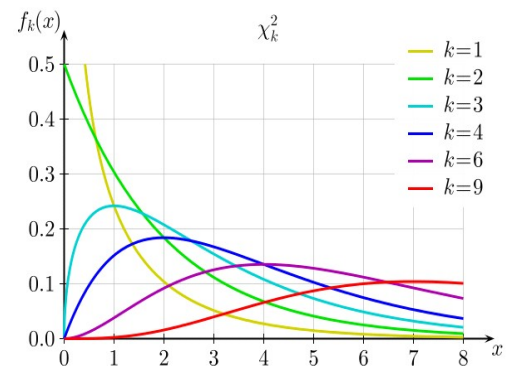


Se o ruído em cada dimensão é gaussiano com $\sigma = 1$ então módulo do ruído total tem distribuição chi-quadrado (ver detalhes no término do capítulo).

$$|\vec{r}|^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2$$

Em consequência o valor do raio r_0 da classe deve ser escolhido baseado nesta distribuição.

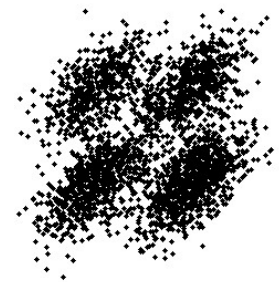
Tentaremos chegar próximo a esta condição através do branqueamento do ruído.



4 - Branqueamento do Ruído – gerando classes esféricas *classes sphereing*

Se os ruídos das componentes forem correlatos os domínios das classes serão elipsoides e estarão contidos por esferas maiores, que incluem espaços da não classe.

O branqueamento do ruído leva a classes esféricas, que permitirá o uso de um classificador muito mais simples. O branqueamento do ruído dos dados é obtido em duas etapas.



Inicialmente a decorrelação dos ruídos r_i deve ser obtida representando os dados $\underline{x}$ (padrão da classe + ruído) em uma base $\underline{B}$ do espaço das componentes principais (PCA) do ruído $\underline{r}$ de cada dado de entrada (**PCA dos ruídos, e não dos sinais!**).

$$\vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r} \quad \therefore \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j$$

Calculamos a matriz $\underline{B}$ das PCA de $\underline{r}$. Utilizando $\underline{B}$ determinamos o mapeamento de cada ruído $\underline{r}$ em sua PCA $\underline{p}$

$$\vec{p} = \underline{B} \vec{r} \quad \text{onde} \quad [B] = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{b}_m \end{bmatrix} \quad e \quad p_i = \vec{b}_i \vec{r}$$

(obs: $\vec{b}_i$ são vetores linha)

e a variância de cada componente p_i

$$\sigma_i^2 = E[p_i]^2 = E[\vec{b}_i \vec{r}]^2$$

A segunda etapa deve ser a equalização da potência do ruído nas diversas dimensões. A matriz de pesos $\underline{\sigma}^{-1}$ para normalização das potências dos ruídos será

$$\underline{\sigma}^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)$$

Para a classe C_j os novos dados à classificar serão

$$\vec{z} = \underline{\sigma}^{-1} \underline{B} \vec{x} = \underline{N} \vec{x} = \underline{N} \vec{m}_j + \underline{N} \vec{r} = \vec{m}_{j_{novo}} + \vec{r}_{novo}$$

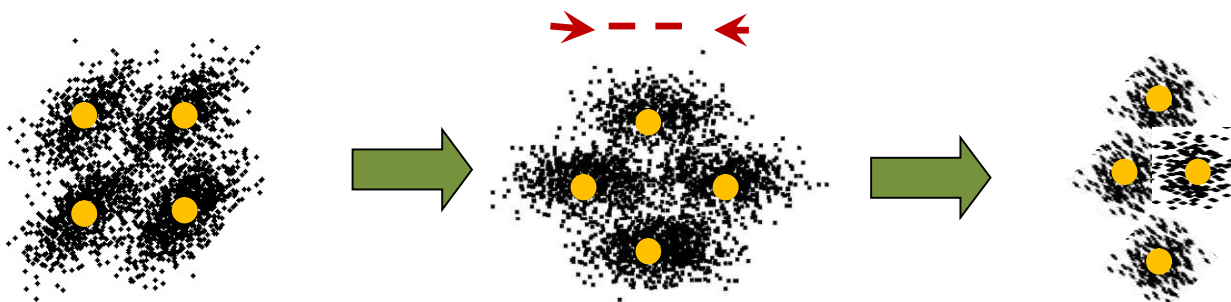
$$\text{onde } [N] = \underline{\sigma}^{-1} \underline{B} = \dots \begin{bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vdots \\ \vec{n}_m \end{bmatrix} = \dots \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_m} \vec{b}_m \end{bmatrix} \quad e \quad r_{novo} = \vec{n}_i^t \vec{r} \quad e \quad m_{novo} = \vec{n}_i^t \vec{m}_i$$

(obs: $\vec{n}_i$ são vetores linha)

As classes passam a ter um novo padrão $\vec{m}_{j_{novo}}$ adicionado de um ruído branco

$\vec{r}_{novo}$ cujas componentes $r_{j_{novo}}$ são não correlatas e apresentam média nula e desvio padrão unitário.

$$\vec{m}_{j_{novo}} = \underline{N} \vec{m}_j \quad \vec{r}_{novo} = \underline{N} \vec{r} \quad \sigma(\vec{r}_{novo}) = \vec{1} = [1 \ 1 \ 1 \dots 1]^t$$



4.1 Algumas observações:

- A multiplicação por $\underline{B}$ representa uma rotação e por isto não altera a posição relativa das classes, como será visto adiante. Mas a multiplicação por $\underline{\sigma}^{-1}$ altera.
- Como $\underline{B}$ é ortonormal e $\underline{\sigma}^{-1}$ é diagonal o conhecimento da matriz branqueadora $\underline{N}$ permite determinar $\underline{B}$ e $\underline{\sigma}^{-1}$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \dots \\ \vec{b}_n \end{bmatrix} \quad \vec{b}_i \vec{b}_j^t = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\vec{n}_i \vec{n}_i^t = (\sigma_i^{-1} \vec{b}_i) (\sigma_i^{-1} \vec{b}_i^t) = \sigma_i^{-2} \quad e \quad \vec{b}_i = \sigma_i \vec{n}_i$$

- O uso de PCA sugere a eliminação de componentes pouco relevantes, i.e., com pequenos

$$\sigma_i^2 = E[p_i]^2 = E[\vec{b}_i \vec{r}]^2$$

e a consequente redução da dimensionalidade e simplificação do classificador. Entretanto, a eliminação de uma componente principal para $\vec{r}_j$ somente pode ser feita se for pouco relevante para $\vec{x}$, isto é, se

$$\sigma^2(z_i) = E\left[\frac{1}{\sigma_i} \vec{b}_i \vec{x}\right]^2 \quad \text{for muito pequeno comparado com seus pares.}$$

A relevância para $\vec{x}$ é que determina a eliminação ou não da componente !

- A multiplicação por $\underline{P}$ realiza um escalamento diferente por componente e pode alterar a classificação, principalmente se houver grande dispersão entre os σ_i , como será visto adiante,
- Caso os ruídos sejam não correlatos, a primeira etapa é obviamente desnecessária

$$\underline{B} = \underline{I}$$

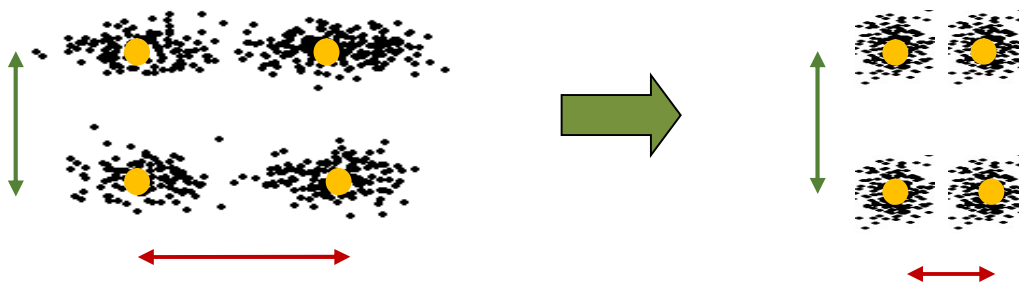


E a dispersão em cada dimensão i é dada por

$$\sigma_i^2 = E[r_i]^2 \quad \text{e} \quad \underline{\sigma}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)$$

Os novos dados à classificar serão

$$\vec{z} = \underline{\sigma}^{-1} \vec{x} = \underline{\sigma}^{-1} \vec{m}_j + \underline{\sigma}^{-1} \vec{r} = \vec{m}_{j_{novo}} + \vec{r}_{novo}$$



5. Algumas distribuições importantes:

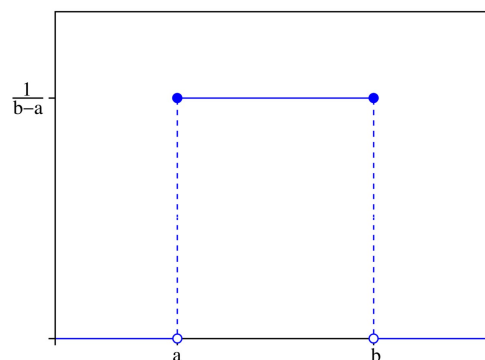
5.1 Distribuição uniforme

É a distribuição mais simples, a probabilidade de geração de um número em um intervalo $[a, b]$ é constante e independe do número. É bastante usada na geração de números aleatórios em programas computacionais, como por exemplo para a geração dos valores iniciais aleatórios das sinapses de uma rede neural

Função de distribuição (ou densidade) de probabilidade, f.d.p.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$



No caso da geração de valores iniciais das sinapses

$$w \in [-a, +a] \quad \mu = 0 \quad \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Função erro (uma das definições)

Função de distribuição de probabilidade acumulada

$$erf(r_0) = p(r_i | r_i < r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} p(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } r_0 < a \\ \frac{r_0 - a}{b - a} & \text{se } a \leq r_0 \leq b \\ 1 & \text{se } r_0 > b \end{cases}$$

5.2 Distribuição Normal ou Gaussiana

A distribuição Normal ou Gaussiana é uma das distribuições de probabilidade mais utilizadas para modelar fenômenos da natureza porque um grande número destes fenômenos apresenta sua distribuição de probabilidade aproximadamente normal, por exemplo o ruído branco.

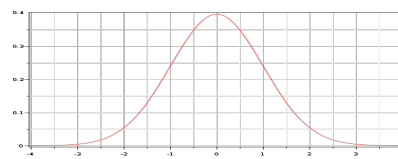
Em nosso caso consideramos que os elementos $\underline{x}$ de uma classe C são compostos pelo padrão $\underline{m}$ da classe adicionado de ruído branco $\underline{r}$.

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r} \quad \therefore$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j \quad e \quad r_i = x_i - m_{ij}$$

Função de distribuição de probabilidade, f.d.p.

$$p(r_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}$$

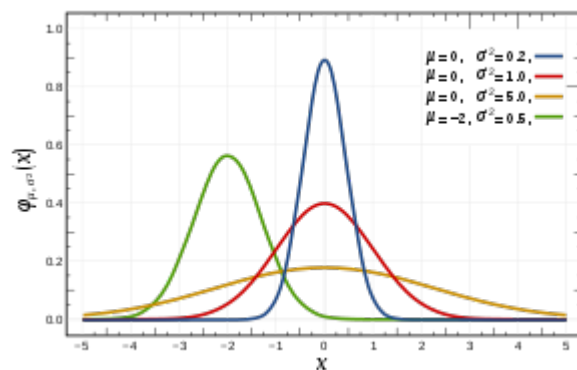


Média = mediana = moda

$$\mu = 0$$

Desvio padrão

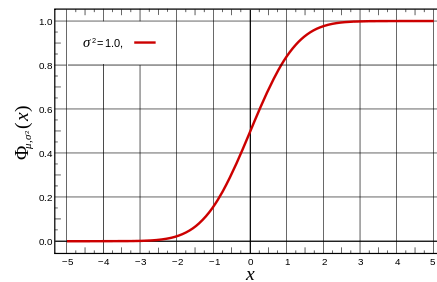
$$\sigma$$



Função erro (uma das definições)

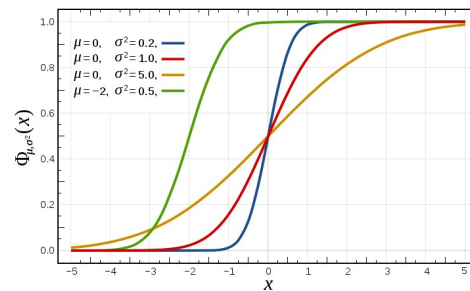
Função de distribuição acumulada

$$\text{erf}(r_0) = p(r_i | r_i < r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} p(t) dt$$



Sem expressão analítica,

tabelada para $\sigma = 1$



Gaussiana e erf para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$

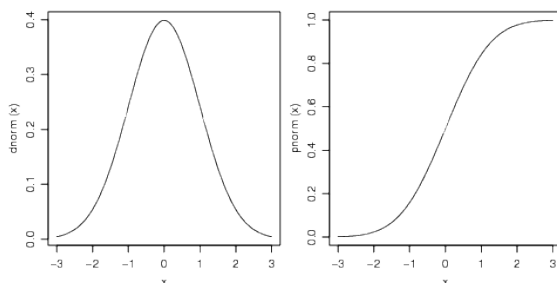


TABLE 47		AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE from $-\infty$ to z									
		$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$									
z		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0		.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1		.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2		.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3		.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4		.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5		.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6		.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7		.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8		.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9		.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0		.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1		.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2		.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3		.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4		.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5		.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6		.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7		.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8		.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9		.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0		.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1		.9821	.9825	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2		.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3		.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4		.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5		.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6		.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7		.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8		.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9		.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0		.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1		.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2		.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3		.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4		.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5		.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6		.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7		.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8		.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Distribuição Normal Padrão Acumulada

Tabela simplificada

fornece $P(r_0) = P(-\infty < r < r_0)$.

$P(r_0)$	.5	.75	.84	.90	.98	.99	1.00
r_0	0	.68	1.00	1.30	2.00	2.5	3.00

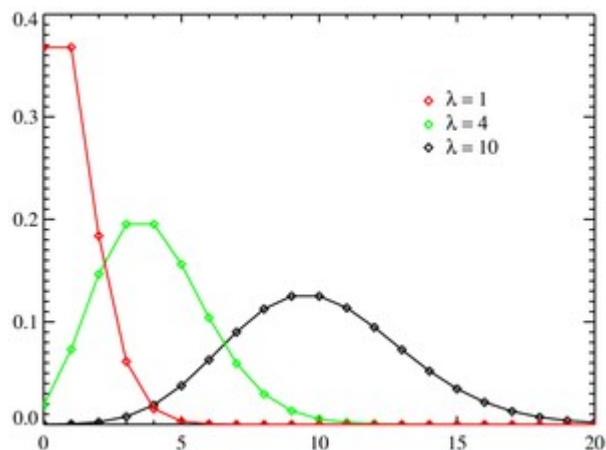
5.3 Distribuição de Poisson

Fenômenos naturais que podem assumir apenas valores inteiros e não negativos usualmente seguem a distribuição de Poisson. São exemplos o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa por segundo, o número de pessoas que entram em uma determinada loja por dia, etc.

$$p(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$\mu \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

As funções de densidade simples e acumulada existem tabeladas.



A distribuição de Poisson tende para a Gaussiana quando a média é elevada.

5.4 Distribuição Chi-quadrado χ_n^2

A distribuição qui-quadrado é importante porque permite calcular a probabilidade de uma entrada $\underline{x}$ afetada de ruído branco $\underline{r}$ estar a uma distância $\underline{d}$ do padrão da classe $\underline{m}$, isto é, permite estimar a probabilidade da similaridade de uma entrada com seu padrão.

$$\forall \vec{x} \in C_j \quad \vec{x} = \vec{m}_j + \vec{r} \quad \therefore \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{m}_j$$

$$r_i = x_i - m_{ij} \quad e$$

$$d^2 = \left| \vec{x} - \vec{m}_j \right|^2 = \left| \vec{r} \right|^2 = \sum_{i=1}^k r_i^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - m_{ij})^2 = -u$$

Para o caso ideal, com todos os r_i não correlatos e com $\sigma_i = 1$

em cada dimensão i de $\vec{x}$ $d_i^2 = r_i^2 = -u_i$

distribuição χ_1^2 com 1(um) grau de liberdade

em todas as n dimensões de $\vec{x}$ $d^2 = \sum_{j=1}^k r_j^2 = -u$

distribuição χ_n^2 com n graus de liberdade

Função densidade de probabilidade χ_n^2

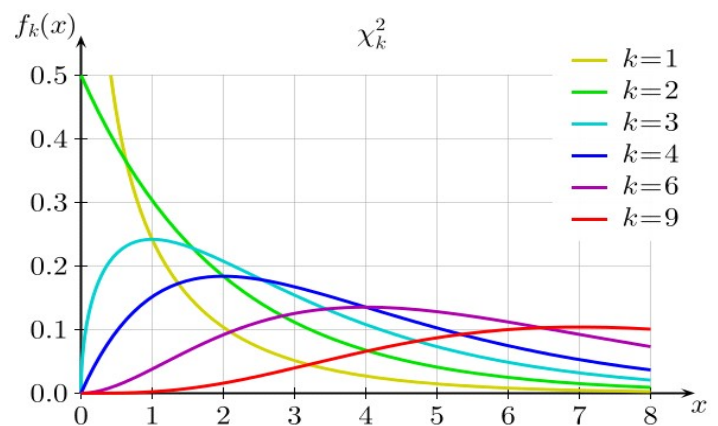
$$p_n(r) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} r^{n/2-1} e^{-r/2}$$

média = n

mediana = $\approx n \left(1 - \frac{2}{9n}\right)^3$

moda = $\max[0, (n-2)]$

variância = $2n$

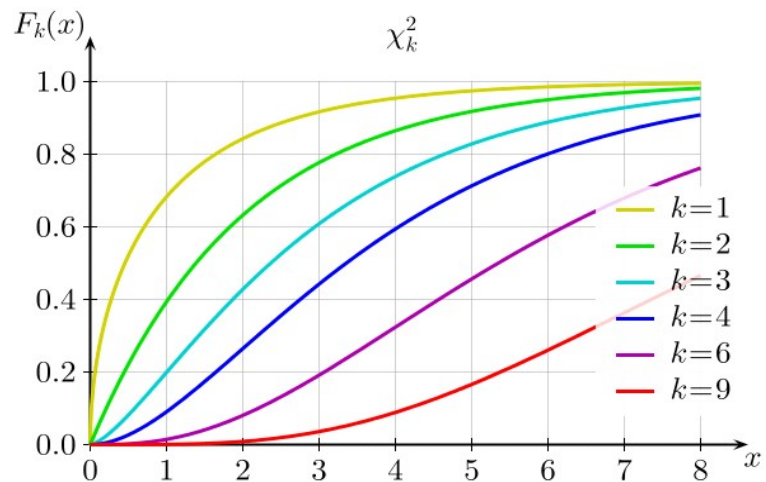


Função erro (uma das definições) de χ_k^2

Função de distribuição de probabilidade acumulada

$$P_n(r_0) = \text{erf}(r_0) = p(r | r < r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} p(t) dt = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{r_0}{2}\right)$$

tabelada para diversos n



Distribuição Chi quadrado acumulada

Tabela simplificada

Fornece o quantil r_0 em função do n° de g.l. n (linha) e de $P(r_0) = P(r < r_0)$ (coluna).

$P(r_0)$ n	.5	.75	.9	.95	.99
1	.46	1.32	2.71	3.84	6.64
2	1.39	2.77	4.61	5.99	9.21
3	2.37	4.11	6.25	7.82	11.35
4	3.36	5.39	7.78	9.49	13.28
5	4.35	6.63	9.24	11.07	15.09
6	5.35	7.84	10.65	12.59	16.81
7	6.35	9.04	12.02	14.07	18.46
8	7.34	10.22	13.36	15.51	20.09
9	8.34	11.39	14.68	16.92	21.67
10	9.34	12.55	15.99	18.31	23.21

TABLE 49	PERCENTILE VALUES (χ_p^2) FOR THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION with n degrees of freedom (shaded area = p)
-------------	---

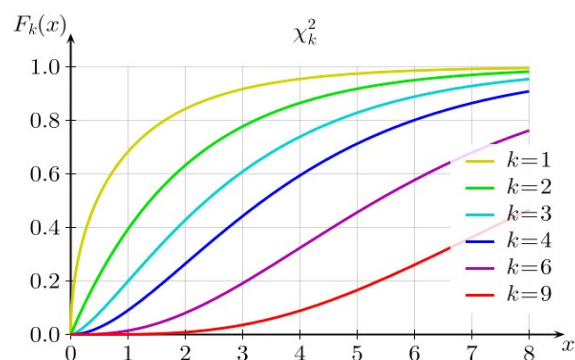
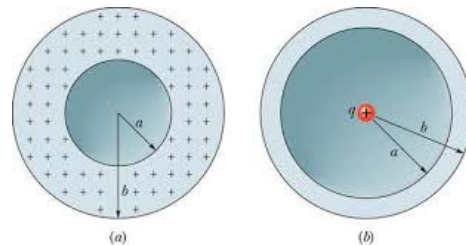
n	$\chi_{.995}^2$	$\chi_{.990}^2$	$\chi_{.975}^2$	$\chi_{.950}^2$	$\chi_{.900}^2$	$\chi_{.850}^2$	$\chi_{.800}^2$	$\chi_{.750}^2$	$\chi_{.700}^2$	$\chi_{.650}^2$	$\chi_{.600}^2$	$\chi_{.550}^2$	$\chi_{.500}^2$	$\chi_{.450}^2$	$\chi_{.400}^2$	$\chi_{.350}^2$	$\chi_{.300}^2$	$\chi_{.250}^2$	$\chi_{.200}^2$	$\chi_{.150}^2$	$\chi_{.100}^2$	$\chi_{.050}^2$	$\chi_{.025}^2$	$\chi_{.010}^2$	$\chi_{.005}^2$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	.455	.102	.0158	.0039	.0010	.0002	.0000												
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	.575	.211	.103	.0506	.0291	.0190												
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	.584	.352	.216	.115	.072												
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	.711	.484	.297	.207												
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	.831	.554	.412												
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	.872	.676												
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	.989												
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34												
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73												
10	25.2	23.2	20.6	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16												
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60												
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07												
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57												
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07												
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60												
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14												
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70												
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26												
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84												
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43												
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03												
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64												
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26												
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89												
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5												
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2												
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8												
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5												
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1												
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8												
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7												
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0												
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5												
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3												
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2												
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2												
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3												

Source: Catherine M. Thompson, Table of percentage points of the χ^2 distribution, Biometrika, Vol. 32 (1941), by permission of the author and publisher.

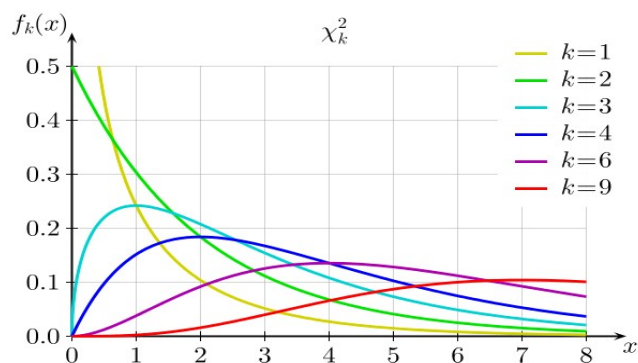
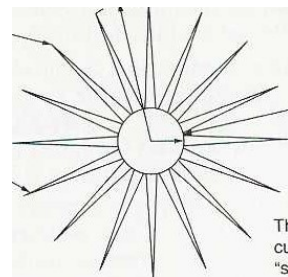
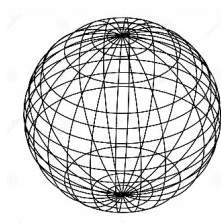
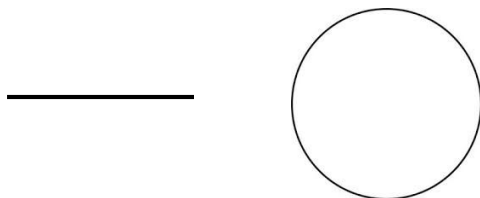
Densidade populacional local

% da população em uma casca de raio r / volume da casca

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P_n(r)}{\Delta V_n(r)} &= \frac{dP_n(r)}{dr} \bigg/ \frac{dV_n(r)}{dr} = \\ &= \frac{1}{n 2^{n/2} A_n(1) \Gamma(n/2)} r^{-n/2} e^{-r/2} = \\ &= \frac{f(n)}{r^{n/2} e^{r/2}}\end{aligned}$$



Geometria multidimensional



o problema da multidimensionalidade:
quanto maior a dimensão mais difícil um agrupamento eficaz !